Семинар 4.
Проективные преобразования. Подпространства проективного пространства

Задача 1. В $\mathbb{P}^2$ дан полный 4-вершинник $XX'Y'Y$, и обозначены точки $P = (XX') \cap (YY')$ и $Q = (XY) \cap (X'Y')$.
а) Докажите, что существует единственное проективное преобразование f плоскости $\mathbb{P}^2$, удовлетворяющее условиям $f(X) = X',\ f(Y) = Y'$ и оставляющее поточечно неподвижной прямую (PQ). С помощью линейки постройте образ $f(Z)$ произвольной точки $Z \notin (PQ)$.
б) Образуют ли преобразования вышеуказанного типа с фиксированной прямой неподвижных точек группу? Изоморфна ли эта группа какой-либо группе аффинных преобразований?

Задача 2. а) Существует ли проективное преобразование прямой $\mathbb{P}^1$ над произвольным полем $\mathbf{k}$, имеющее единственную неподвижную точку? Если да, то каким минимальным числом соответственных точек оно определяется?
б) Образуют ли проективные преобразования прямой $\mathbb{P}^1$ с единственной неподвижной точкой вместе с добавленным к ним тождественным преобразованием группу? Изоморфна ли эта группа какой-либо группе аффинных преобразований?

Задача 3. а) Пусть $\mathbb{P}^1$ - прямая в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, проективное преобразование f этой прямой, имеющее единственную неподвижную точку A. Продолжается ли f до проективного преобразования $\tilde{f}$ плоскости $\mathbb{P}^2$, имеющего прямую неподвижных точек?
б) Пусть указан минимальный набор соответственных точек преобразования f, включающий точку A. Для произвольной точки $X \in \mathbb{P}^1$ с помощью линейки постройте точку $f(X)$. (*Указание*: воспользуйтесь задачами 1.а и 3.а.)

Задача 4. а) В плоскости $\mathbb{P}^2$ даны прямые $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$ и $x_0 - 3x_1 + 4x_2 = 0$. Найдите точку их пересечения. б) Три прямые в $\mathbb{P}^2$ заданы уравнениями: $l_i = \{a_i x_0 + b_i x_1 + c_i x_2 = 0\},\ i = 1, 2, 3$. Какое условие нужно наложить на коэффициенты этих уравнений для того, чтобы эти прямые l_i имели хотя бы одну общую точку.
в) В пространстве $\mathbb{P}^3$ даны три плоскости $x_0+x_1-x_2+_3 = 0$, $3x_0-x_1+x_2-3_3 = 0$ и $2x_0+2x_1-2x_2-_3 = 0$. Найдите все точки их пересечения. Сколько их?
г) Четыре плоскости в $\mathbb{P}^3$ заданы уравнениями: $\pi_i = \{a_i x_0 + b_i x_1 + c_i x_2 + d_{i3} = 0\},\ i = 1, 2, 3, 4$. Какое условие нужно наложить на коэффициенты этих уравнений для того, чтобы эти плоскости π_i имели хотя бы одну общую точку.

Задача 5. Две прямые в $\mathbb{P}^3$ заданы либо: а) своими уравнениями $l_i = \{a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_{13} = 0\} = \{a'_1 x_0 + b'_1 x_1 + c'_1 x_2 + d'_{13} = 0\},\ i = 1, 2$, либо б) параметрически $l_i = \{x_j = s u_j + t v_j,\ j = 0, 1, 2, 3,\ (s : t) \in \mathbb{P}^1\},\ i = 1, 2$. В обоих случаях какое условие нужно наложить на коэффициенты этих уравнений для того, чтобы прямые l_1 и l_2 пересекались.