

Семинар 5.

Группа проективных преобразований и ее аффинная подгруппа

Задача 1. В $\mathbb{P}^2$ даны прямая l и точка $O \notin l$ и фиксирован скаляр $\lambda \in \mathbf{k}$, отличный от 0 и 1. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{P}^2 \setminus (\{O\} \cup l) \rightarrow \mathbb{P}^2$, сопоставляющее точке X точку X' на прямой (OX) такую, что $(OPXX') = \lambda$, где $P = (OX) \cap l$. Докажите, что f продолжается до проективного преобразования $f_{\lambda,l,O}$ плоскости $\mathbb{P}^2$. Преобразование $f_{\lambda,l,O}$ называется *гомографией*. Найдите неподвижные точки гомографии $f_{\lambda,l,O}$. При каком λ она является инволюцией?

- Задача 2.** а) Дайте аффинную интерпретацию гомографии $f_{\lambda,l,O}$ из задачи 1.
 б) Пользуясь этой интерпретацией, укажите, при каком условии на λ_1 и λ_2 композиция $f_{\lambda_2,l,O_2} \circ f_{\lambda_1,l,O_1}$ двух гомографий снова есть гомография f_{λ_3,l,O_3} , и выразите λ_3 через λ_1 и λ_2 .
 в) Чем является композиция $f_{\lambda_2,l,O_2} \circ f_{\lambda_1,l,O_1}$, если условие из пункта б) не выполнено.
 г) Образуют ли преобразования из пунктов б) и в) в совокупности группу?

Задача 3. Назовем два проективных преобразования $f, g \in PGL(\mathbb{P}^n)$ *сопряженными* в группе $PGL(\mathbb{P}^n)$, если найдется такое преобразование $\varphi \in PGL(\mathbb{P}^n)$, что $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. В аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ рассмотрим преобразования $f : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ (центральная симметрия) и $g : (x, y) \mapsto (x, -y)$ (аффинная симметрия относительно оси абсцисс). Вложим $\mathbb{A}^2$ в проективную плоскость $\mathbb{P}^2$, добавив к $\mathbb{A}^2$ несобственную проективную прямую $\mathbb{P}_\infty^1$. Продолжим аффинные преобразования f и g до проективных преобразований $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ плоскости $\mathbb{P}^2$. Сопряжены ли $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ в группе $PGL(\mathbb{P}^2)$?

Задача 4. Тот же вопрос, что и в задаче 3:

- а) для аффинных преобразований плоскости $f : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ (аффинного сдвига) и $g : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ (параллельного переноса на вектор $(1, 0)$);
 б) для аффинных преобразований пространства $f : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ (центральная симметрия) и $g : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ (аффинная симметрия относительно плоскости Oxy).

Задача 5. Рассмотрим проективное преобразование f пространства $\mathbb{P}^n$, записанное в проективных координатах $(x_0 : \dots : x_n)$ посредством матрицы $A = (a_{ij}) \in GL(n + 1, \mathbf{k})$ как $f : (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\sum_i a_{0i}x_i : \dots : \sum_i a_{ni}x_i)$. Рассмотрим двойственное проективное пространство $\check{\mathbb{P}}^n$ и отображение $\check{f} : \check{\mathbb{P}}^n \rightarrow \check{\mathbb{P}}^n$, $\mathbb{P}^{n-1} \mapsto f(\mathbb{P}^{n-1})$. Докажите, что $\check{f}$ - проективное преобразование пространства $\check{\mathbb{P}}^n$. Как связана матрица преобразования $\check{f}$ (записанного в двойственных координатах в $\check{\mathbb{P}}^n$) с матрицей A ?