Листок 1.6

Интеграл Римана и элементарные функции

срок сдачи 2 марта

Элементарные функции

Предлагаемое ниже определение логарифма и экспоненты предложены А.Н.Колмогоровым в его лекциях для школьников. Интеграл определялся как площадь, а вместо формулы замены переменной использовалось сохранение площади при гиперболических поворотах: $(x, y) \mapsto (ax, \frac{y}{a}),\ a > 0$. Для $x > 0$ положим:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Задача 1. Докажите, что:
а) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
б) $\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$; $\ln x \to -\infty$ при $x \to +0$,
в) существует функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, обратная ln (она обозначается exp).

Задача 2. Докажите следующие формулы: а) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

Указание. используйте замену переменной.

б) $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$;
в) $(\exp x)' = \exp x$.

Задача 3. Докажите следующие представления экспоненты в виде ряда и предела :
а) $\exp x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;
б) $\exp x = \lim\limits_{n\to 0} (1 + \frac{x}{n})^n$;
в) Положим: $\exp 1 = e$. Докажите, что $\exp x = e^x$.

Алгебраические методы интегрирования и рациональность квадрик

Задача 4. а) Докажите, что всякая рациональная функция разлагается на простейшие:

$$R(x) = p(x) + \sum_j \frac{p_j(x)}{(x - a_j)^{n_j}}. \tag{1}$$

Здесь p и p_j — многочлены с комплексными коэффициентами, причем $\deg p_j < n_j$; суммирование ведется по всем корням многочлена — знаменателя рациональной функции R.

Указание. Проведите индукцию по числу корней знаменателя R.

б) Найдите интеграл от правой части формулы (1).

в) Докажите, что всякая рациональная функция с вещественными коэффициентами разлагается в сумму дробей вида $\frac{p_j}{q_j^n}$, где p_j и q_j — многочлены с вещественными коэффициентами, причём $\deg(q_j) \leq 2$, $\deg p_j < n \deg q_j$.

Указание. Сгруппируйте слагаемые, соответствующие сопряжённым корням.

Задача 5. Найдите разложение $\frac{1}{x^n+1}$
а) на простейшие комплексные дроби; б) на простейшие вещественные дроби.
в) Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n+1}$.

Задача 6. а) Выразите $\sin(x)$, $\cos(x)$ через $t = \operatorname{tg}(x/2)$.
б) Выразите $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ через $t = \operatorname{th}(x/2)$.
в) В предыдущих пунктах выразите dx через dt.

Задача 7.* Докажите, что для любой невырожденной комплексной проективной квадрики Q существует рациональная биекция сферы Римана на Q (то есть биекция $\mathbb{C} \cup \infty \to Q$, задаваемая рациональными функциями $x = R_1(t),\ y = R_2(t)$).

Задача 8.* Задайте формулой все *пифагоровы тройки*, то есть целочисленные решения уравнения $a^2 + b^2 = c^2$.

Интегрируемость функций по Риману

Задача 9. Докажите, что интеграл Римана существует для тех и только тех функций на отрезке, для которых супремум множества нижних интегральных сумм равен инфимуму множества верхних интегральных сумм.

Определение. Функция называется *кусочно-непрерывной* на отрезке, если она имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, и в каждой из них имеет односторонние пределы.

Задача 10. Докажите, что всякая кусочно-непрерывная функция на отрезке интегрируема по Риману.

Определение. *Колебанием* функции в точке называется разность ее верхнего и нижнего предела в этой точке.

Задача 11.* Докажите, что для любой функции на отрезке множество точек, колебание функции в которых не меньше заданной константы, замкнуто.

Определение. Будем говорить, что множество A на отрезке [0,1] *имеет меру 0*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счетным объединением интервалов, сумма длин которых меньше ε.

Задача 12.* Пусть множество точек, в которых колебание функции f на отрезке $[0, 1]$ не меньше $\varepsilon > 0$, имеет меру 0. Докажите, что супремум множества нижних интегральных сумм f отличается от инфимума множества верхних интегральных сумм f не больше, чем на ε.

Задача 13.* Докажите *критерий Лебега*: функция на отрезке интегрируема по Риману, если и только если она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру 0.
а) Достаточность
б) Необходимость

Аксиоматическое определение интеграла Римана

Обозначим через C^0_{pc} векторное пространство кусочно-непрерывных функций с компактным носителем на прямой (т.е. функций, равных нулю вне некоторого отрезка, зависящего от функции).

Задача 14.* Рассмотрим линейное отображение (функционал) $I : C^0_{pc} \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:
i) положительность: если $f \geq 0$ то $I(f) \geq 0$,
ii) трансляционная инвариантность:

$$I(f \circ T_a) = I(f), \text{ где } T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ — параллельный перенос: } T_a(x) = x + a,$$

iii) аддитивность: $I(f \cdot \chi_{[a,b]}) + I(f \cdot \chi_{[b,c]}) = I(f \cdot \chi_{[a,c]})$,
iv) нормировка: $I(\chi_{[0,1]}) = 1$. Здесь χ_A — характеристическая функция множества A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Докажите, что I — интеграл Римана.