Материалы к семинарам по матанализу (второй семестр)

5-я и 6-я недели (5–16.02.2018)

Лекции 7–9.

1. Лекция 7. Алгебраические методы интегрирования
2. Лекция 8. Длина кривой и работа силы. Несобственные интегралы
3. Лекция 9. Дифференциал функции

Примерные задачи семинаров 7–9

Предполагается, что 7-й семинар будет (частично) посвящён задачам семинаров 4 - 6.

Задача 3.1. а) Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$.

б) Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln^{\circ 2} x)\ldots(\ln^{\circ n} x)}$, где $f^{\circ k}$ — результат k-кратного применения f.

Задача 3.2. Пусть $f, g \in C^2$ обращаются в 0 в точках α и β; пусть $h \in C^1$. Докажите, что

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}(hf')g\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}(hg')f\,dx.$$

Задача 3.3. При каких α сходятся следующие интегралы, и при каких α они сходятся абсолютно: а) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha\,dx$?

Задача 3.4.* При каких α сходятся следующие интегралы, и при каких α они сходятся абсолютно: а) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \sin(x^\alpha)\,dx$, $\alpha < 0$?

Задача 3.5. Исследуйте на сходимость:
а) $\displaystyle\int_0^\infty x^N e^{-x}\,dx$, $N \in \mathbb{N}$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^n}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2 + lx}\,dx$, $\varepsilon > 0$.

Задача 3.6. Определим *гамма-функцию* при $x > 0$ формулой $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)dx$.
а) Докажите, что Γ-функция определена (интеграл сходится) при $x > 0$.
б) Докажите, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Вычислите значения $\Gamma(n)$ для натуральных n.
в) К чему стремится $\Gamma(x)$ при $x \to 0$ и при $x \to \infty$?

Задача 3.7. Пусть $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция.

Докажите, что интеграл $\displaystyle\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ сходится и расходится одновременно с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Задача 3.8. При каких значениях параметров $\alpha, \beta > 0$ сходятся следующие ряды (суммирование начинается с того n, с которого все члены ряда становятся определены):
а) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$; б) $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)^\alpha}$; в) $\displaystyle\sum \frac{1}{(n-a)^\alpha(n-b)^\beta}$; г) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha + n^\beta}$; д) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

Длина кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ определяется как предел длин ломаных $\gamma(t_0)\gamma(t_1)\ldots\gamma(t_n)$, когда диаметр разбиения $a = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n = b$ стремится к нулю.

Задача 3.9.* Пусть кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ такова, что функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы. Докажите, что её длина определена и равна

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Указание. Воспользуйтесь равномерной непрерывностью функций $x'(t)$, $y'(t)$.

Задача 3.10. Вычислите длины участков графика функций:
а) $y = 1/x$, $x \in [1, 2]$; б) $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$;
в) $y = e^x$, $x \in [0, 1]$; г) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

Задача 3.11. Кривая задана в полярных координатах: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$. Найдите формулу для её длины (считая функции r, φ непрерывно дифференцируемыми).

Задача 3.12. Найдите длины кривых, заданных параметрически. Здесь (x, y) — евклидовы координаты, а (r, φ) — полярные.
а) $x(t) = t - \sin(t)$, $y(t) = 1 - \cos(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (циклоида);
б) $x(t) = \cos(t) + t\sin(t)$, $y(t) = \sin(t) - t\cos(t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
в*) $r = 1 + \cos(\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$ (кардиоида);
г) $r = \phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$ (виток архимедовой спирали);
д) $r = e^{-\phi}$, $\phi \in [0, \infty)$ (логарифмическая спираль).