Лекция 6-18. Элементарные функции вещественного и комплексного переменного

1 Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора.

Теорема 1 *Пусть $f \in C^{n+1}$, и R - остаточный член в формуле Тейлора для f:*

$$R = f - T_{f,0,n}.$$

Тогда

$$R(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \tag{1}$$

Доказательство Как известно,

$$R(0) = R'(0) = \cdots = R^{(n)}(0) = 0, \tag{2}$$

и $R^{(n+1)}(x) \equiv f^{(n+1)}(x)$. Формула (1) восстанавливает функцию R по этим данным; мы пишем $R^{(n+1)}$ вместо $f^{(n+1)}$.

Формула (1) доказывается индукцией по n. База $n = 0$. Тогда (1) имеет вид:

$$R(x) = \int_0^x R'(t)dt.$$

Это -формула Ньютона-Лейбница.

Шаг. Предположение индукции. Пусть

$$R(0) = R'(0) = \cdots = R^{(n-1)}(0) = 0,$$

Тогда

$$R(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{(n-1)} R^{(n)}(t)dt. \tag{3}$$

Интегрирование по частям с учетом (2) сводит формулу (1) для $n+1$ и R вместо f к той же формуле (3) для n. $\square$

2 Остаточный член в форме Коши.

Теорема 2 *В условиях теоремы* (1) *существует $\xi \in (a, b)$ такое, что*

$$R(x) = \frac{x}{n!}(x-\xi)^n \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Доказательство Доказывается применением первой интегральной теоремы о среднем к отрезку $[a, b] = [0, x]$ и функции f, замененной на $\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)$. $\square$

3 Остаточный член в форме Лагаранжа.

Теорема 3 *В условиях теоремы* (1) *существует* $\xi \in (a, b)$ *такое, что*

$$R(x) = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Доказательство Доказывается применением второй интегральной теоремы о среднем к отрезку $[a, b] = [0, x]$ и функциям $g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ и f, замененной на $f^{(n+1)}$. $\square$

4 Определение и свойства вещественного логарифма и экспоненты, по Колмогорову

Приводимое ниже определение логарифма и экспоненты было предложено А.Н.Колмогоровым в его лекциях для школьников. Интеграл определялся как площадь под графиком, а вместо формулы замены переменной использовалось сохранение площади при гиперболических поворотах: $(x, y) \mapsto (ax, \frac{y}{a}),\ a > 0$. Этот материал - прекрасная тема для занятий со школьниками.

Определение 1 *Для* $x > 0$ *положим:*

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

.

Предложение 1 *Функция* $\ln$ *обладает следующими свойствами:*

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*;*
2. $\ln x \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$*;*
3. $\ln x \to -\infty$ *при* $x \to 0$*;*
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$*;*
5. *Существует функция* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, обратная* $\ln$ *(он обозначается* $\exp$*);*
6. $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$*;*
7. $(\exp x)' = \exp x$*;*
8. $\exp x = \lim\limits_{n \to 0} (1 + \frac{x}{n})^n$*;*
9. $\exp x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
10. *: Положим:* $e = \exp 1$. *Тогда* $\exp x = e^x$.

5 В гостях у Эйлера

Определение 2 $e^z = \sum \frac{z^k}{k!}$

Теорема 4 *Ряд сходится* $\forall z \in \mathbb{C}$.

Теорема 5 $e^z = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$