Материалы к семинарам по матанализу

3-я и 4-я недели (22.01.2018–04.02.2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 4–6. Интегральное исчисление

1. Определение интеграла Римана
2. Интеграл от непрерывной функции
3. Формула Ньютона-Лейбница
4. Аддитивность интеграла
5. Замена переменной
6. Интегрирование по частям
7. Интегральные теоремы о среднем
8. Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора
9. Остаточный член в форме Лагранжа и Коши
10. Вещественная теория логарифма и экспоненты (по Колмогорову)
11. Комплексная экспонента, логарифм и степень
12. Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра (по Арнольду)
13. Гиперболический синус и косинус, логарифм, арктангенс

Примерные задачи семинаров 4–6

Этот список задач - избыточный. Будет только полезно, если он займет еще и занятие 7 (м.б., частично).

Занятия сильно обгоняют лекции. Определения и свойства элементарных функций будут рассказаны только на лекции 6, а нужны уже на занятии 4. Поэтому в текст задач нужно включить следующую информацию.

Определение 1. Натуральный логарифм $\ln x$ – это первообразная для $\dfrac{1}{x}$, определенная на положительной полуоси и нормированная условием $\ln 1 = 0$.

Определение 2. Экспонента $\exp x$ – это функция, обратная натуральному логарифму.

По определению, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$. По теореме об обратной функции, $\exp' x = \exp x$.

Определение 3.

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Обоснование табличных интегралов должно сопровождаться обоснованием формул для производных соответствующих элементарных функций: выводом тех, которые встречаются впервые и повторением старых.

Табличные интегралы

Задача 2.1. Обоснуйте таблицу интегралов:

а) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1,$

б) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c,$

в) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c,\ a \in \mathbb{R},$

г) $\int e^{\alpha x} dx = \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c,\ \alpha \in \mathbb{C},$

д) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c,$

е) $\int \cos x\, dx = \sin x + c,$

ж) $\int \dfrac{1}{1-x^2} dx = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1+x}{1-x} \right| + c,$

з) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c,$

и) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c,$

к) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$

Периодические функции и интегрируемость

Задача 2.2. Докажите, что первообразная от периодической функции сама периодична тогда и только тогда, когда интеграл исходной фунукции по периоду равен нулю.

Задача 2.3. При каких значениях параметра a интеграл

а) $\int (\exp(a \sin x) - 1)\, dx,$

б) $\int \ln(a \sin x + 1)\, dx$

является периодической функцией?

Задача 2.4. Интегрируема ли по Риману функция Дирихле?

Интегрирование

Определение 4. Рациональная функция – это отношение многочленов. Она называется правильной, если степень знаменателя больше, чем степень числителя.

Теорема 1. Правильная рациональная функция, знаменатель которой имеет степень n и только простые корни a_j, разлагается в сумму простейших:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{x - a_j}, \quad b_j := \frac{p(a_j)}{q'(a_j)}.$$

Теорема 2. Правильная рациональная функция, знаменатель которой имеет n корней a_j кратности k_j, разлагается в сумму простейших:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{1}^{n} \frac{p_j(x)}{(x - a_j)^{k_j}},$$

где $p_j(x)$ - многочлены степени меньше k_j.

Последнее разложение удобно находить методом неопределенных коэффициентов.

Задача 2.5. Разложите в сумму простейших дробей и найдите первообразные следующих функций:

а) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$,

б) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$,

в) $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)}$,

г) $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}$,

д) $\dfrac{1}{1-x^n}$, $n \in \mathbb{N}$,

е) $\dfrac{1}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Формула замены переменной:

Теорема 3. $\displaystyle\int f(g(t))\, g'(t) dt = \int f(x) dx$

Задача 2.6. Вспомните определения гиперболического косинуса и синуса и докажите, что разность их квадратов равна 1, а при дифференцировании они переходят друг в друга.

Задача 2.7. Пусть R — рациональная функция. Произведите указанные ниже подстановки и убедитесь, что задача сводится к интегрированию рациональных функций.

а) $\displaystyle\int R(\exp(x))dx$, $t = \exp(x)$.

б) $\displaystyle\int R(\sin(x), \cos(x))dx$, $t = \exp(ix)$.

в) $\displaystyle\int R(\sin(x), \cos(x))dx$, $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

г) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, $x = \sin(t)$.

д) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$, $x = \operatorname{sh}(t)$.

е) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, $x = \operatorname{ch}(t)$.

ж) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, подстановку укажите самостоятельно.

з) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$, $t = \sqrt{ax+b}$.

Задача 2.8* Решите пункты г) д) е) задачи 2.7 с помощью рациональной функции от t.

Подсказка. Параметризуйте кривую $y^2 = \pm x^2 \pm 1$ с помощью стереографической проекции.

Задача 2.9. Вычислите следующие неопределённые интегралы.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$,

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-e^x}$,

в) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)dx$,

г) $\displaystyle\int \operatorname{th}(x)dx$,

д) $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$,

е) $\displaystyle\int \operatorname{sh}^2(x)dx$,

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$,

з) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$,

и) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$,

к) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, л) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^{x}}$,

м) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{x}}}$,

н) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$,

о) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$,

п) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx$,

р) $\displaystyle\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$