Лекция 7. Элементарные функции комплексного переменного. Алгебраические методы интегрирования

1 Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра

`thm:exp3` **Теорема 1** $e^{x+iy} = e^x(\cos x + i \sin y)$.

2 Комплексный логарифм

`def:ln` **Определение 1** *Логарифм–функция, обратная экспоненте (нужны уточнения).*

`def:ln1` **Определение 2** $\ln z = \ln |z| + i \arg z$

Это вообще не функция, потому что $\ln z$ определен неоднозначно!

3 Производные функций комплексного переменного

Напомним определение комплексной производной.

`def:diff` **Определение 3** *Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ комплексно дифференцируема, если существует предел*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \ \ z, h \in \mathbb{C}.$$

Пример 1 *Функции z и 1 имеют комплексную производную. Функции $\bar{z}, x, y, |z|$ комплексной производной не имеют!*

`thm:ar` **Теорема 2** *Для комплексного дифференцирования справедливы те же формулы для производных от суммы, произведения, частного и композиции, как и в вещественном случае.*

Доказательства точно такие же.

Определение 4 *Квазимногочлен - это произведение экспоненты на многочлен.*

Следствие 1 *Все многочлены и квазимногочлены дифференцируемы. Рациональные функции дифференцируемы во всех точках, кроме полюсов.*

Замечание 1 *Ограничение комплексной производной на вещественную ось совпадает с вещественной производной.*

4 Производные многочлена, логарифма, экспоненты

thm:diff **Теорема 3** *Справедливы следующие формулы для комплексных производных:*

$$(z^n)' = nz^{n-1},\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z};$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},\ (e^z)' = e^z,\ (e^{\lambda z})' = \lambda e^{\lambda z}$$

5 Интегрирование рациональных функций.

Ниже используется основная теорема алгебры.

Теорема 4 *Пусть знаменатель рациональной функции $\frac{p}{q}$ имеет корни a_j кратности k_j . Тогда существует разложение этой рациональной функции на простейшие дроби:*

$$\frac{p}{q}(z) = p_0(z) + \sum \frac{p_j(z)}{(z-a_j)^{k_j}} + \sum \frac{\lambda_j}{z-a_j},\ \textit{где } k_j > 1,\quad \textit{deg}\ p_j < k_j. \tag{1}$$ eqn:decom

thm:int1 **Следствие 2** *Пусть рациональная функция $\frac{p}{q}$ разложена на простейшие дроби по формуле* (1). *Тогда*

$$\int \frac{p}{q}(z)dz = P_0(z) + \sum \frac{\tilde{p}(z)}{(z-a_j)^{k_j-1}} + \sum \lambda_j \ln(z-a_j).$$

Многочлены $\tilde{p}_j$ находятся явно с помощью разложения многочлена p_j по степеням $z - a_j$.

Теоремы 3 и 2 позволяют интегрировать любые рациональные функции.

6 Логарифм и арктангенс–близнецы-братья.

Применим предыдущую теорему к $R(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Получим

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \ln \frac{z-i}{z+i} + C$$

Однако известно, что

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C'.$$

Следствие 3 *При* $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} = \operatorname{arctg} x + C. \tag{2}$$

eqn:arc

Чему равно C?

thm:arctan

Теорема 5 *В предыдущей формуле* $C = -\frac{\pi}{2}$*:*

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

eqn:arcta

Эти свойства позволяют применять алгебраические методы интегрирования независимо от того, являются ли корни вспомогательных многочленов вещественными или комплексными.