Лекция 8. Алгебраические методы интегрирования. Длина кривой

1 Формулировка

Теорема 1 *Следующие функции имеют первообразные, выражаемые через элементарные функции:*
a) Квазимногочлены
b) Тригонометрические многочлены
c) Рациональные функции
d) Рациональные функции от синуса и косинуса
e) Рациональные функции от x и $\sqrt{P_2(x)}$, где P_2–многочлен второй степени.

Утверждение c) доказано на прошлой лекции по модулю теоремы 4. Остальные доказаны ниже.

2 Интегрирование квазимногочленов. Метод неопределенных коэффициентов.

$(e^{\lambda x}P(x))' = e^{\lambda x}q(x),$ q дано, P–искомое. Равносильное уравнение

$$\lambda P + P' = q$$

относительно коэффициентов многочлена P представляет собой треугольную систему, которая всегда разрешима.

3 Тригонометрические многочлены

Формула Эйлера сводит интегрирование любого многочлена от синусов и косинусов к интегрированию многочлена от $\exp ix$, которое, в свою очередь, сводится к табличному интегралу.

4 Разложение на простейшие

Здесь доказана теорема 4 прошлой лекции. Начнем с частного случая.

Теорема 2 *Рациональная дробь, знаменатель которой–многочлен с простыми (комплексными) корнями, а степень числителя меньше, чем степень знаменателя, разлагается в сумму простейших дробей:*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum \frac{\lambda_j}{x - a_j}, \ \text{где } \lambda_j = \frac{p(a_j)}{q'(a_j)},$$

a_j–корни многочлена q.

Доказательство теоремы основано на лемме

lem:poles **Лемма 1** *Рациональная функция, не имеющая полюсов на сфере Римана, постоянна.*

Теперь докажем теорему в общем виде. Напомним ее формулировку.

thm:int1 **Теорема 3** *Пусть*

$$\frac{p}{q}(z) = p_0(z) + \sum \frac{p_j(z)}{(z - a_j)^{k_j}} + \sum \frac{\lambda_j}{z - a_j}, \ \text{где } k_j > 1, \quad deg\ p_j < k_j.$$

Тогда

$$\int \frac{p}{q}(z)dz = P_0(z) + \sum \frac{\tilde{p}(z)}{(z - a_j)^{k_j - 1}} + \sum \lambda_j \ln(z - a_j).$$

Многочлены $\tilde{p}_j$ находятся явно с помощью разложения многочлена p_j по степеням $z - a_j$.

Доказательство (Схема) Пусть $q = q_1(z)(z - a_j)^{k_j}$, $q_1(a_j) \neq 0$. Рациональная функция $f = \frac{p}{q_1}$ не имеет полюса в точке a_j. Следовательно, она аналитична в ней и разлагается по формуле Тейлора в сумму $f = T + R$, где T - многочлен степени $k_j - 1$, а остаточный член - рациональная функция, голоморфная в a_j, которая делиться на $(z - a_j)^{k_j}$. Тогда разность

$$\frac{p}{q} - \frac{T}{(z - a_j)^{k_j}} = \frac{R}{(z - a_j)^{k_j}}$$

не имееет полюса в точке a_j. Теорема доказывается теперь с помощью леммы 1 индукцией по числу корней знаменателя дроби $\frac{p}{q}$. □

5 Рациональные функции от тригонометрических

Теорема 4 *Интеграл от рациональной функции от синуса и косинуса сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены: $e^{ix} = t$.*

Последнее утверждение теоремы 1 будет доказано на следующей лекции.

6 Длина кривой

def:leng **Определение 1** *Длина кривой - это предел последовательности длин вписанных в нее ломаных при стремлении к нулю длины их максимальных звеньев.*

thm:leng **Теорема 5** *Длина графика дифференцируемой функции f, заданной на отрезке $[a, b]$ равна*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

.

Теорема 6 *Длина кривой γ, заданной отображением f отрезка [0,1] в Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, равна*

$$|\gamma| = \int_0^1 |f'(x)| dx.$$