**НИС ««Геометрия и топология банаховых пространств».**

**Краткое содержание, первые 5 занятий.**

*№1. 10 января. Эквивалентность норм в . Функционалы Минковского. Двойственность между нормами и нормирующими телами.*

**Теорема 1.** Для метрики ** TFAE: (1) она инвариантна относительно переносов и однородна; (2) она задаётся некоторой нормой **. *Напомним, что норма…..*

Одна из целей этой лекции – дать описание того, как устроены нормы в плоскости . (*На  - аналогично.*) Несмотря на все различия – все нормы на плоскости задают одну и ту же (евклидову) топологию = семейство открытых множеств.

**Теорема 2**. Для любых двух норм  и на плоскости есть константы такие, что

. В частности, множество открыто   открыто.

(*По-другому: тождественное отображение  на себя является изоморфизмом между нормированными плоскостями  и )*

 На самом деле, евклидовой оказывается вообще любая (не обязательно задаваемая нормой или метрикой) топология  , согласованная с векторными операциями, в которой одноточечные множества замкнуты.

**Теорема 3**. Пусть  - норма. Тогда  есть симметричное относительно *0*, выпуклое, компактное множество, для которого *0* является внутренней точкой.

**Определение**. Пусть  - произвольное выпуклое подмножество нормированного пространства  и пусть нулевой элемент  является внутренней точкой . Тогда функция ,  называется **функционалом Минковского** множества .

**Теорема 4**. (обратная к Т.3) Пусть  есть симметричное относительно *0*, выпуклое, компактное множество, для которого *0* является внутренней точкой. Тогда имеется единственная норма , для которой  является ее единичным «кругом», т.е. .

Теоремы 3 и 4 означают, что все нормы в плоскости есть в точности функционалы Минковского всех плоских выпуклых, центрально-симметричных компактных тел. Кратко, между всеми нормами и всеми плоскими центрально-симметричными выпуклыми компактными телами есть естественная биекция.

**Определение**. Изометрией между * и * называется линейное отображение (биекция), при котором ,т.е. *сохраняются расстояния, или «круг»**переходит в «круг»* 

Изометричны все нормы, у которых «круги» – эллипсы; они не изометричны нормам, у которых «круги» - многоугольники. Транзитивность действия группы изометрий на единичной окружности – критерий того, что норма задаётся скалярным произведением.

*№2. 17 января. Банаховы пространства последовательностей.*

**Теорема 0.** Для лин. отобр. ** БП TFAE: (1) *Т* непр.; (2) *Т* непр. в нуле; (3) *Т*  ограничено, т.е.

*.*

**Определение.** Пусть *X* и *Y* - два нормированных *n-*мерных проcтранства (две нормы в **). Расстояние Банаха-Мазура ** - это инфимум по всем ** произведения ** нормы оператора ** и нормы оператора **.

**Лемма 1.** **. Всюду ниже ** .

 **Лемма 2.** **. **Лемма 3.** **.

**Теорема 1.** **, то **. *По сопряжённым, то же для .*

*Случай  куда как более деликатный.*

**Теорема 1’.** **, где , константы (из неравенства) Хинчина и  , .

В частности, **.

*Неизометричность можно чуть по-другому. Если бы конечномерные  и  были бы изометричны, то и бесконечномерные  были бы изометричны, а это* ***не так****, см. ниже.*

**Теорема 2 (сам.?)** Векторное пространство **всех финитных последовательностей нормируемо, но не может быть банаховым. Док-во. От противного. Все конечномерные подпространства бесконечномерного банахова – замкнуты и нигде не плотны. Далее, **теорема Бэра**. □

**Теорема 3.** Банаховы пространства  и  не изоморфны.

Проф. док-во. (теорема Питта, 1936). Всякий линейный оператор ** **компактен** (замыкание образа единичного шара компактно, не содержит шара) и поэтому необратим…….

Руками. **?? От противного. Переходя к подпоследовательности индексов можно считать, что ** .

Утв.1. ** покоординатно. Утв.2. Можно оставить подпоследовательность ** и «обрезки» ** так, что ** и **. **Противоречие при **:**

*.*

Шаг №1. ** , **, как только **.

Шаг №2. Уйдем по столбцам ** настолько далеко, чтобы, начиная с этого места, скажем ** ,

** и **. Тогда*, ,* как только **.

Шаг №3. Уйдем по столбцам ** настолько далеко, чтобы, начиная с этого места, скажем ** ,

** и **. Тогда*, ,* как только **……

*№3. 24 января. Другие банаховы пространства последовательностей.*

 Пополнения ** по разным нормам дают разные БП последовательностей. Хорошо известные пространства  замечательны многими обстоятельствами. Например,

**Теорема 1.** Любое дополняемое подпространство прост-ва изоморфно *Х.* (*Доклад?*)

Но бывает и много других.

**Шкала:** , а пространства Орлича ещё и между этой шкалы.

В 1930-х годах В. Орлич предложил такой вариант замены степенной функции  на абстрактную «хорошую» функцию: , *М*  возрастает и выпукла.



Обычно неравенство треугольника в  (=неравенство Минковского) выводят из неравенства Гёльдера, а его – из неравенства Юнга. На самом деле, они не нужны, а важна только выпуклость.

**Теорема 2.**  - банахово пространство. Если , (условие), то вместо  можно поставить . Если *М*  непрерывна, то - это корень уравнения .

 Типичный пример функции Орлича:  для непрерывной, возрастающей . Если две функции Орлича  с условием совпадают в окрестности нуля, то и нормы эквивалентны. Более того,

**Теорема 3.** TFAE: (1) ; (2)  при некоторых . Единичные«орты»  образуют (шаудеровский, безусл., симм., огр.полн) базис.

*Числовые характеристики: во сколько раз абсцисса точки касания больше подкасательной?*

*Для - это р.* В общем виде, .

**Теорема 4.** а)  изоморфно подпространству 

б)  в)  рефлексивно .

 Примеры:

 , , содержит (из Орличевских) только  и , содержит дополняемо.

Но есть случаи с , когда  не содержит  дополняемо.

 , , но симметричный базис – единственнен (с точн. до изом.)



**Пр-ва Лоренца.**  для перестановки координат по убыванию. Не изоморфно , но иногда изоморфно . Например, при  и .

**Пр-ва Джеймса.** Квазирефлексивное пространство, изометричное своему второму сопряженному.

С базисом, но не вкладывается в подпр-во с безусловным базисом.



**Пр-во Цирельсона.**  Рефлексивное пространство Т, в котором каждое бесконечномерное подпространство финитно универсально (= для любого n-мерного НП в Т есть n-мерное подпространство такое, что расстояние Банаха-Мазура не больше **универсальной** константы).

*Лекция 4. 7 февраля. (31-го янв. не было). Пр-ва непрерывных функций.*

**Теорема** **1**. (К. Куратовский). Всякое (полное) метрическое пространство *X*  изометрично (замкнутому) подмножеству БП * -* все непрерывные огр. числовые функции, **

**Теорема 2.** (Э. Майкл, 1956). Всякое (полное) метрическое пространство изометрично линейно независимому (замкнутому) подмножеству БП * -* все огр. числовые функции на А.

Док-во. **. *.*

**

**Теорема 3.** (Войдыславский, 1939…). Всякое метрическое пространство Х изометрично линейно независимому замкнутому подмножеству нормированного БП Y, densY=densX.

Док-во. Y-лин. оболочка образа вложения пополнения Х в ** из предыд. теоремы.

**Теорема 4.** (Банах?) Всякое нормированное пространство Е изометрично и линейно отображается в ** , card A = dens E - наименьшая мощность всюду плотного подмножества.

Док-во. Считаем А – плотным подмножеством един. сферы. **.

**. T – линейно и **.

**Теорема 5.** (Мазур - Улам). Сюрьективная изометрия между нормированными пространствами, оставляющая 0 на месте, линейна. *Сюрьективность важна: любое отображение 1-липшицева, не линейная, с L(0)=0, L(t)=sint.*

Док-во. **Идея!!!** Середину отрезка определить не векторно, а в терминах нормы. Тогда при изометрии середина отрезка перейдет в середину,

*…..*

Для любого огр. Х метрического (М, d) определим 1-центр ** и по индукции определим **. Если ** непусто, то это одна точка!!

Если **, то все ** симметричны относительно ** и содержат *с.*

**Теорема 6. (Банах, м.комп., Стоун - любые).** ** изометрично ** К и Т гомеоморфны.

Док-во. **Идея!!!** Свойство непр. функции иметь единственную точку максимума определить в терминах нормы. Тогда при изометрии одна «единственная точка максимума» перейдет в другую «единственную точку максимума», это и будет гомеоморфизм между компактами.

**Лемма.** Для **  TFAE: (1) **; (2) **.

Более того, предел в (2) равен .

*«Стоун» Изометрия между  и  индуцирует изометрию между сопряженными, это «меры» и крайними точками единичных шаров являются +- «дельта»-функции, т.е. получается отображение самих компактов.*

**Теорема** (Амир, 1966). Если **, то К и Т гомеоморфны. Константа 2 неулучшаема.

*№5. 14 февраля. Гильбертовы пространства.*

**Теорема 1.** Если *H* - бесконечномерное векторное пространство с нормой, которая задаётся скалярным произведением, и относительно которой *Н*  полно и сепарабельно, то *Н* изометрично **.

Схема док-ва. 0) счётное всюду плотное подмножество; 1) счётное линейно независимое подмножество линейная оболочка которого всюду плотна; 3) ортонормированный базис; 4) каждому вектору – последовательность его скалярных произведений с элементами базиса.

Всё замечательно, но в конкретном случае найти базис – это задача. Например, построить базис в **

**Простая геометрия** ****.**

1. Замкнутая выпуклая оболочка ортов – это **не** **. Попадает и начало координат.

2. Последовательность **: 0 – предельная точка в слабой топологии, но нет слабо сходящейся к нулю подпоследовательности. Или – замкнутое, но не слабо замкнутое. В частности, слабая топология не метризуема, хотя шар (и любое огр. мн-во) в слабой топологии метризуемы.

Возьмем слабую окрестность нуля: *.*

**

Все ** или **. **. Все подпоследовательности не ограничены по норме и значит слабо не сходятся.

3. Существует непрерывная кривая, у которой перпендикулярны любые две, следующие друг за другом, хорды. *Тривиально, если вместо  рассмотреть  - хар. функции отрезков.*

4. …**, если ** замкн. вып. ограничены (верно в любом рефлекс). Без diam к нулю.

Неверно в C[0;1] **.

5. Любая борелевская инвариантная по сдвигам мера - бесконечна на любом шаре.

6. В топологии поточечной сходимости произведение операторов разрывно. (нильпотентные индекса 2 всюду плотны)

7. Любой обратимый оператор – произведение двух экспонент и GL(H) – лин. связна (стягиваема).

**Теорема.** Любое замкнутое выпуклое подмножество A – строго чебышёвское.

Пусть ** и **- замкнуты, выпуклы, огр., вложены. **??

** **

Значит, диаметры стремятся к нулю и пересечение из одной точки. *Где выпуклость А и А­\_n нужна??*

**Пример.** **.  - выпукло, замкнуто, но нет ближ. к нулю.

**Теорема (**Моцкин, Бунтман**).** Всякое строго чебышёвское подмножество в конечномерном евклидовом пр-ве выпукло.

**Проблема (**Стечкин, Кли, 1960**).**  Верно ли для бесконечномерного гильбертова?