Накрытия и теория Галуа (весна 2018)

Листок 1

Сдача до 28.02.2018

Определение 1.1. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывное отображение топологических пространств. Отображение π называется **накрытием**, если у каждой точки есть такая окрестность U, что $\pi^{-1}(U)$ изоморфно произведению U и непустого дискретного топологического пространства K, причем стандартное отображение $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$ совпадает с естественной проекцией $\pi^{-1}(U) = U \times K \to U$. В этом случае также говорится, что $\tilde{M}$ **накрывает** M.

Задача 1.1. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R}^n \to (S^1)^n$ это накрытие.

Задача 1.2. Рассмотрим фактор $S^n \to S^n/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P^n$ сферы по центральной симметрии, с естественной топологией (открытые множества — это такие, прообраз которых открыт). Докажите, что это накрытие.

Задача 1.3. Докажите, что $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$.

Задача 1.4.* Докажите, что при $n > 1$ имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 1.5.* Дан конечный связный граф, у которого n ребер и n вершин. Пусть M — его топологическое пространство. Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$.

Задача 1.6. Пусть $M_1 \xrightarrow{\pi_1} M$, $M_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ — накрытия. Рассмотрим следующее подмножество в $M_1 \times M_2$

$$M_1 \times_M M_2 := \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 \;\;|\;\; \pi_1(m_1) = \pi_2(m_2)\}.$$

Мы рассматриваем $M_1 \times_M M_2$ как топологическое пространство (с топологией, индуцированной из $M_1 \times M_2$). Докажите, что естественное отображение $M_1 \times_M M_2 \to M$ – это накрытие.

Задача 1.7. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как накрытие S^1. Сколько связных компонент у $\mathbb{R} \times_{S^1} \mathbb{R}$?

Задача 1.8. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — непрерывное отображение.

а) Пусть π — накрытие Докажите, что у каждой точки $x \in \tilde{M}$ есть окрестность U такая, что проекция $\pi : U \to \pi(U)$ — гомеоморфизм.

б) Пусть у каждой точки $x \in \tilde{M}$ есть окрестность U такая, что проекция $\pi : U \to \pi(U)$ — гомеоморфизм. Всегда ли π — накрытие?

Определение 1.2. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ — накрытия. **Морфизмом накрытий** называется непрерывное отображение $\phi : \tilde{M} \to \tilde{M}'$, согласованное с проекцией в M — иначе говоря, такое, что $\phi \circ \pi' = \pi$. Множество морфизмов между накрытиями обозначается $\mathcal{M}or(\tilde{M}, \tilde{M}')$. Изоморфизмом накрытий называется морфизм, который обратим, причем таким образом, что $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}$, $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{Id}$.

Задача 1.9. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие. Рассмотрим проекцию (по первому аргументу) $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \to \tilde{M}$ как накрытие $\tilde{M}$. Постройте взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{M}or_{\tilde{M}}(\tilde{M}, \tilde{M} \times_M \tilde{M})$ и множеством автоморфизмов $\tilde{M}$ над M.