Лекция 5. Полные метрические пространства -2.

Теорема 1 («Теорема Бэра о категории»**).**
1) Полное метрическое пространство невозможно представить в виде объединения счётного семейства нигде не плотных подмножеств.
2) В полном метрическом пр-ве пересечение счётного числа открытых всюду плотных подмножеств непусто (на самом деле, всюду плотно).

Док-во 2). Пусть G_1 - открыто, всюду плотно и «красное», G_2 - открыто, всюду плотно и «синее», G_3 - открыто, всюду плотно и «фиолетовое» и т.д. Возьмём любой открытый r-шар U. В нём есть «красная» точка и есть «красный» открытый подшар. Его радиус можно уменьшить, шар считать замкнутым и радиуса меньше чем r/2. Внутри «красного» шара есть «синяя» точка и есть «синий» открытый подшар. Его радиус можно уменьшить, считать замкнутым и радиуса меньше чем r/4 и т.д. Получаем последовательность вложенных замкнутых шаров, диаметры которых стремятся к нулю. По критерию полноты, см. пред. лекцию, есть единственная точка x_0, принадлежащая всем шарам. Эта точка x_0 – всех цветов, которые имелись, и лежит в шаре U. Значит, $\bigcap G_n$ всюду плотно.

Словами, 1) – полное метрическое пространство не может быть <u>первой категории</u> в себе (не может быть «тощим»); 2) п.м.пр-во – <u>второй категории</u> в себе («толстое»).

Пример 1_1. Существует непрерывная на отрезке [a;b] функция, которая отлична от константы и которая не является монотонной ни на каком из подотрезков.

<u>Док-во.</u> Пусть I_n - последовательность всех подотрезков с рациональными концами.
$G_n = \left\{ \mathrm{f} \in \mathrm{C}[a;b] : \ f\Big|_{I_n} - \textit{не монотонна} \right\}$ - открыто (неравенство $(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(y))(\mathrm{f}(y)-\mathrm{f}(z))<0$ остаётся верным для $g \in \mathrm{C}[a;b]$, $g \overset{\varepsilon}{\approx} f$) и всюду плотно. Так как $\mathrm{C}[a;b]$ - полно, то (по теореме Бэра) $\bigcap G_n$ непусто, и, более того, всюду плотно. Любая функция из пересечения - нужная.

Пример 1_2. Существует непрерывная на отрезке [a;b] функция, которая нигде не дифференцируема. Множество таких функций всюду плотно в C[a;b].

<u>Док-во.</u> $F_n = \left\{ \mathrm{f} \in \mathrm{C}[a;b] : \exists x \ \forall x' \left| f(x') - f(x) \right| \le n \left| x' - x \right| \right\}$ - замкнуто и нигде не плотно. По теореме Бэра объединение всех F_n не совпадает с C[a;b]. Любая из оставшихся функций – нужная.

Можно из 1_2 вывести 1_1, но нужна сложная теорема Лебега: монотонная функция «почти всюду» дифференцируема.

Пример 1_3. Множество рациональных чисел невозможно представить в виде пересечения счётного семейства открытых числовых множеств.

<u>Док-во.</u> От противного, пусть $\mathbb{Q} = \{ r_1, r_2, r_3, ... \} = \bigcap G_n$. Тогда множества $F_n = \{ r_n \} \bigcup (\mathbb{R} \setminus G_n)$ замкнуты и их объединение – это $\mathbb{R}$. По теореме Бэра одно из них где-то плотно и в силу замкнутости содержит некоторый интервал. Но, с другой стороны, по построению в F_n - всего одно рациональное число.

Теорема 2. (теорема Арцела – Асколи =критерий предкомпактности в пространстве *C[a;b]*). Для подмножества $\varPhi$ пространства *C[a;b]* непрерывных функций на отрезке TFAE:
(1) $\varPhi$ вполне ограничено; (2) $\varPhi$ равномерно ограничено и <u>равностепенно непрерывно</u>.

Чтобы определить <u>равностепенную непрерывность</u> множества $\varPhi \subset \mathrm{C}[a;b]$ надо сначала взять определение равномерной непрерывности **одной** функции $\mathrm{f} \in \varPhi$, а потом добавить $\forall \mathrm{f} \in \varPhi$. Вот что получится: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x,\, x' \in [a;b] \ \ \forall \mathrm{f} \in \varPhi \quad |x' - x| < \delta \ \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Типичный пример равностепенной непрерывности - функции с $|f'| \le const$ или липшицевы (с константой) функции.

Следствие *(Теорема Пеано).* *Дифференциальное уравнение* $y' = f(x, y)$ *с правой частью, непрерывной в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям, имеет хотя бы одно локальное решение с любым начальным условием* $y(x_0) = y_0$. *(только анонс)*

<u>*Док-во.*</u> *Ломаные Эйлера – графики функций из множества* $\varPhi$ *, которое равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Её предел – решение диффура.*