

Семинар 6. Билинейные и квадратичные формы

Задача 1. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbf{k}$. Докажите, что множество $L_2(V)$ билинейных форм на V является векторным пространством над $\mathbf{k}$ относительно операций сложения форм и умножения форм на скаляры, определяемых поточечно (то есть для любых $x, y \in V$) следующим образом:

$$(f_1 + f_2)(x, y) := f_1(x, y) + f_2(x, y), \quad f_1, f_2 \in L_2(V),$$
$$(\alpha f)(x, y) := \alpha f(x, y), \quad f \in L_2(V), \quad \forall \alpha \in \mathbf{k}.$$

Задача 2. Назовем билинейную форму f *симметрической* (соответственно, *кососимметрической*), если для любых $x, y \in V$ имеем $f(x, y) = f(y, x)$ (соответственно, $f(x, y) = -f(y, x)$).

а) Докажите, что множество $L_2(V)_s$ всех симметрических (соответственно, множество $L_2(V)_a$ всех кососимметрических) билинейных форм в V является векторным подпространством в $L_2(V)$.

б) Пусть $\dim_{\mathbf{k}} V = n$. Найдите размерности пространств $L_2(V)$ и $L_2(V)_s$. (*Указание.* Воспользуйтесь доказанным на лекциях фактом, что всякая билинейная форма однозначно определяется своей матрицей в некотором базисе.)

в) Пусть $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$. Найдите размерность пространства $L_2(V)_a$ и докажите, что $L_2(V) = L_2(V)_s \oplus L_2(V)_a$.

Задача 3. Пусть V конечномерно, и билинейная форма f на V задана своей матрицей A в некотором базисе (e) пространства V .

а) Пусть новый базис (e') в V связан с базисом (e) посредством матрицы перехода X : $(e') = (e)X$. Выразите матрицу A' формы f в базисе (e') через A и X .

б) Назовем *рангом* $\text{rk } f$ билинейной формы f ранг ее матрицы A в некотором базисе. Докажите, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора базиса в V .

в) Назовем *левым* (соответственно, *правым*) *ядром* билинейной формы f подмножество $W_l = \{x \in V \mid f(x, y) = 0 \forall y \in V\}$ (соответственно, $W_r = \{y \in V \mid f(x, y) = 0 \forall x \in V\}$). Докажите, что W_l и W_r - подпространства в V . Как связаны их размерности между собой и с рангом формы f ?

Задача 4. *Квадратичной формой* на векторном пространстве V над полем $\mathbf{k}$ называется такое отображение $F : V \rightarrow \mathbf{k}$, для которого существует билинейная форма f на V такая, что $F(v) = f(v, v)$ для всех $v \in V$. Докажите, что если $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$, то для всякой квадратичной формы F существует единственная симметрическая билинейная форма f со свойством $F(v) = f(v, v)$, $v \in V$. (Она называется *поляризацией* формы F .)

Задача 5.

а) Докажите, что если билинейная форма f на V обладает свойством $f(v, v) = 0$ для всех $v \in V$, то она кососимметрична.

б) Докажите, что если $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$, то ранг любой кососимметрической билинейной формы четен.

Дополнительные задачи к семинару 6

Задача 1. Пусть A - матрица билинейной формы f в данном базисе (e) пространства V , и V^* - двойственное к V пространство. Рассмотрим отображение $\tilde{f}: V \rightarrow V^*$, $x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$.

а) Докажите, что $\tilde{f}$ - линейное отображение. Как по матрице A найти ранг отображения $\tilde{f}$?

б) Пусть (e^*) - базис пространства V^* , двойственный к базису (e) . Выразите матрицу отображения $\tilde{f}$ в базисах (e) и (e^*) через матрицу A .

Задача 2. Матрицей A квадратичной формы F в данном базисе (e) пространства V называется матрица ее поляризации - билинейной формы - в этом базисе. Пусть $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, и базис (e) в V выбран так, что матрица A квадратичной формы F диагональна. Обозначим через r_+ , r_- и r_0 соответственно число положительных, отрицательных и нулевых диагональных элементов матрицы A . Докажите, что тройка чисел (r_+, r_-, r_0) не зависит от выбора базиса (e) (она называется *сигнатурой* квадратичной формы F).

Задача 3. Вектор $x \in V$ называется ортогональным вектору $y \in V$ относительно билинейной формы f на V , если $f(x, y) = 0$. Пусть f - такая билинейная форма, что условие ортогональности векторов относительно f симметрично, то есть из $f(x, y) = 0$ следует $f(y, x) = 0$. Докажите, что тогда f либо симметрична, либо кососимметрична.

Задача 4. Пусть $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$, и $A \in M(2r, \mathbf{k})$ - невырожденная кососимметрическая матрица. Докажите, что существует единственный (с точностью до знака) многочлен $\text{Pf}A$ от коэффициентов матрицы A такой, что $\det A = (\text{Pf}A)^2$. (Этот многочлен называется *пфаффианом* матрицы A .)

Задача 5. Пусть $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$. Докажите, что если $\dim V = n$ и f - кососимметрическая форма ранга $2r$, то в V существует базис $e_1, e_2, \dots, e_{2i-1}, e_{2i}, \dots, e_{2r-1}, e_{2r}, e_{2r+1}, \dots, e_n$ такой, что $f(e_{2i-1}, e_{2i}) = -f(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1$, $i = 1, \dots, r$, и $f(e_i, e_j) = 0$ для всех других пар базисных векторов e_i, e_j . (Этот базис называется *симплектическим*.)

Дополнительные задачи к семинару 6

Задача 1. Пусть A - матрица билинейной формы f в данном базисе (e) пространства V , и V^* - двойственное к V пространство. Рассмотрим отображение $\tilde{f}: V \rightarrow V^*$, $x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$.

а) Докажите, что $\tilde{f}$ - линейное отображение. Как по матрице A найти ранг отображения $\tilde{f}$?

б) Пусть (e^*) - базис пространства V^* , двойственный к базису (e) . Выразите матрицу отображения $\tilde{f}$ в базисах (e) и (e^*) через матрицу A .

Задача 2. Матрицей A квадратичной формы F в данном базисе (e) пространства V называется матрица ее поляризации - билинейной формы - в этом базисе. Пусть $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, и базис (e) в V выбран так, что матрица A квадратичной формы F диагональна. Обозначим через r_+ , r_- и r_0 соответственно число положительных, отрицательных и нулевых диагональных элементов матрицы A . Докажите, что тройка чисел (r_+, r_-, r_0) не зависит от выбора базиса (e) (она называется *сигнатурой* квадратичной формы F).

Задача 3. Вектор $x \in V$ называется ортогональным вектору $y \in V$ относительно билинейной формы f на V , если $f(x, y) = 0$. Пусть f - такая билинейная форма, что условие ортогональности векторов относительно f симметрично, то есть из $f(x, y) = 0$ следует $f(y, x) = 0$. Докажите, что тогда f либо симметрична, либо кососимметрична.

Задача 4. Пусть $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$, и $A \in M(2r, \mathbf{k})$ - невырожденная кососимметрическая матрица. Докажите, что существует единственный (с точностью до знака) многочлен $\text{Pf}A$ от коэффициентов матрицы A такой, что $\det A = (\text{Pf}A)^2$. (Этот многочлен называется *пфаффианом* матрицы A .)

Задача 5. Пусть $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$. Докажите, что если $\dim V = n$ и f - кососимметрическая форма ранга $2r$, то в V существует базис $e_1, e_2, \dots, e_{2i-1}, e_{2i}, \dots, e_{2r-1}, e_{2r}, e_{2r+1}, \dots, e_n$ такой, что $f(e_{2i-1}, e_{2i}) = -f(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1$, $i = 1, \dots, r$, и $f(e_i, e_j) = 0$ для всех других пар базисных векторов e_i, e_j . (Этот базис называется *симплектическим*.)