

Семинар 7.

Билинейные, квадратичные и эрмитовы формы

$\text{char } \mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными формами в соответствующих векторных пространствах:

а) $f(x, y) = x \cdot y^t$ ($x, y \in \mathbf{k}^n$ - строки);

б) $f(A, B) = \text{tr}(AB)$; ($A, B \in M(n, \mathbf{k})$);

в) $f(A, B) = \det(AB)$;

г) $f(A, B) = \text{tr}(A^t B)$, $f(A, B) = \text{tr}(AB^t)$;

д) $f(A, B) = \text{tr}(A + B)$;

е) $f(u, v) = \int_a^b uv dx$, ($u(x), v(x)$ - вещественнозначные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$);

ж) $f(u, v) = \int_a^b (u + v)^2 dx$.

Задача 2. а) Какие из билинейных форм задачи 1 являются симметрическими?

б) Билинейная симметрическая форма f в пространстве V над $\mathbb{R}$ называется *неотрицательно определенной*, если $f(v, v) \geq 0$ для любого вектора $v \in V$. Для $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ какие из форм пункта а) являются неотрицательно определенными?

в) Неотрицательно определенная форма f называется *положительно определенной*, если из условия $f(v, v) = 0$ следует, что $v = 0$. Какие из форм пункта б) являются положительно определенными? Найдите их сигнатуру в конечномерном случае.

Задача 3. Приведите к каноническому виду следующие квадратичные формы

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

б) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,

в) $2x_1x_2 - x_3x_4 + 4x_1x_3 + 6x_2x_4$,

и найдите их сигнатуры для случаев $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ и $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

Задача 4. Являются ли следующие комплекснозначные функции от двух аргументов полуторалинейными формами? эрмитовыми полуторалинейными формами?

а) $f(x, y) = x \cdot \bar{y}^t$ ($x, y \in \mathbb{C}^n$ - строки);

б) $f(A, B) = \text{tr}(A\bar{B}^t)$ ($A, B \in M(n, \mathbb{C})$);

в) $f(u, v) = \int_a^b u\bar{v} dx$, ($u(x), v(x)$ - комплекснозначные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$).

г) Какие из них являются положительно определенными?

Задача 5. Приведите к каноническому виду следующие эрмитовы формы:

а) $x_1\bar{x}_1 - ix_1\bar{x}_2 + i\bar{x}_1x_2 + 2x_2\bar{x}_2$,

б) $(1 - i)x_1\bar{x}_2 + (1 + i)\bar{x}_1x_2 + x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3$,

и найдите их сигнатуры.

Дополнительные задачи к семинару 7

Задача 6. Не производя вычислений, выясните, для какой из билинейных форм f существует базис, в котором матрица формы f диагональна:

- а) $f = -x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 - 4x_3y_3$;
- б) $f = -x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$.

Задача 7. Назовем две билинейные формы f_1 и f_2 на пространстве V *эквивалентными*, если существует такое преобразование $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ пространства V , что $f_1(\varphi(x), \varphi(y)) = f_2(x, y)$ для любых векторов $x, y \in V$. Не производя вычислений, выясните, эквивалентны ли формы $f_1 = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 - 2x_3y_1$ и $f_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

Задача 8. Найдите сигнатуру билинейной формы $f(A, B) = \text{tr}(AB)$, где $A, B \in M(n, \mathbb{R})$.

Задача 9. Пусть F - матрица невырожденной билинейной формы f на вещественном пространстве V размерности n .) Докажите, что при нечетном n матрица $-F$ не является матрицей формы f ни в каком базисе пространства V .

Задача 10. Верно ли утверждение задачи 4 для четного n ?

Дополнительные задачи к семинару 7

Задача 11. Не производя вычислений, выясните, для какой из билинейных форм f существует базис, в котором матрица формы f диагональна:

- а) $f = -x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 - 4x_3y_3$;
- б) $f = -x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$.

Задача 12. Назовем две билинейные формы f_1 и f_2 на пространстве V *эквивалентными*, если существует такое преобразование $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ пространства V , что $f_1(\varphi(x), \varphi(y)) = f_2(x, y)$ для любых векторов $x, y \in V$. Не производя вычислений, выясните, эквивалентны ли формы $f_1 = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 - 2x_3y_1$ и $f_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

Задача 13. Найдите сигнатуру билинейной формы $f(A, B) = \text{tr}(AB)$, где $A, B \in M(n, \mathbb{R})$.

Задача 14. Пусть F - матрица невырожденной билинейной формы f на вещественном пространстве V размерности n .) Докажите, что при нечетном n матрица $-F$ не является матрицей формы f ни в каком базисе пространства V .

Задача 15. Верно ли утверждение задачи 4 для четного n ?

Дополнительные задачи к семинару 7

Задача 16. Не производя вычислений, выясните, для какой из билинейных форм f существует базис, в котором матрица формы f диагональна:

- а) $f = -x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 - 4x_3y_3$;
- б) $f = -x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$.

Задача 17. Назовем две билинейные формы f_1 и f_2 на пространстве V *эквивалентными*, если существует такое преобразование $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ пространства V , что $f_1(\varphi(x), \varphi(y)) = f_2(x, y)$ для любых векторов $x, y \in V$. Не производя вычислений, выясните, эквивалентны ли формы $f_1 = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 - 2x_3y_1$ и $f_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

Задача 18. Найдите сигнатуру билинейной формы $f(A, B) = \text{tr}(AB)$, где $A, B \in M(n, \mathbb{R})$.

Задача 19. Пусть F - матрица невырожденной билинейной формы f на вещественном пространстве V размерности n .) Докажите, что при нечетном n матрица $-F$ не является матрицей формы f ни в каком базисе пространства V .

Задача 20. Верно ли утверждение задачи 4 для четного n ?