

Материалы к семинарам по матанализу (второй семестр)

7-я и 8-я недели (19.02–02.03.2018)

Лекции 10–11

1. Лекция 10. Дифференциал функции
2. Лекция 11. Градиент. Старшие производные

Примерные задачи семинаров 10–12

Задача 4.1. Исследуйте непрерывность следующих функций на плоскости:

- а) r (полярный радиус); б) φ (полярный угол);
в) $\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$; г) $\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$; д) $\frac{x + y}{x - y}$; е) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Задача 4.2. Нарисуйте графики и линии уровня функций:

- а) $x^2 + y^2$; б) $x^2 - y^2$; в) xy ; г) $5x - 4y$; д) $y - x^2$; е) $1 - (x^2 + 2y^2)$;
ж) $x^2 + y^3 - 3y$; з*) $\cos x + \cos y$; и) $\frac{x + y}{x - y}$; к) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Задача 4.3. Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ — система координат в области U и f — дифференцируемая функция на U . Докажите, что $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} dg_j$.

Задача 4.4. Приведите пример разрывной функции, имеющей частные производные во всех точках.

Задача 4.5. Найдите частные производные и исследуйте дифференцируемость следующих функций:

- а) r (полярный радиус); б) φ (полярный угол); в) $\sin(2 \arg(x + iy))$; г) $\frac{x + y}{x - y}$; д) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Задача 4.6. Приведите пример непрерывно дифференцируемой функции, хотя бы одна критическая точка которой не является экстремумом.

Задача 4.7. Найдите критические точки следующих функций, исследуйте их тип и нарисуйте линии уровня в окрестности критических точек:

- а) $y^2 + x^3 - 3x$; б) $\sin(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)$; в) $y^2 + \operatorname{ch}(x)$; г) $y^2 + \cos(x)$.

Задача 4.8. Исследуйте на экстремум функции:

- а) $\sin x - \cos y$; б) $y^2 + x^3 + 3x$; в) $xy \ln(x^2 + y^2)$; г) $\sin x \sin y \sin(x + y)$.

Задача 4.9. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — ортогональная система координат на области U . Докажите, что $(\operatorname{grad} f)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Задача 4.10. Нарисуйте векторы градиентного векторного поля функций:

- а) $x^2 + y^2$; б) $1 - (x^2 + 2y^2)$; в) $x^2 - y^2$;
г) $5x - 4y$; д) $x^2 + y^3 - 3y$; е*) $\cos x + \cos y$.

Задача 4.11. Объясните точный смысл утверждения о том, что функция растёт быстрее всего в направлении своего градиента. Докажите это.

Задача 4.12. Найдите и нарисуйте градиентное векторное поле следующих функций:

- а) $ax + by$; б) $6x + 3y + 2018z$; в) $x^2 + y^2$;
г) $x^2 - y^2$; д) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; е) $\varphi = \arg(x + iy)$;
ж) квадратичной формы на \mathbb{R}^n .

(Переменные x, y, z соответствуют ортонормированному базису.)