Семинар 8.
Билинейные и квадратичные формы. Коники в проективной плоскости

char$\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. Напомним, что вещественное векторное пространство V (не обязательно конечномерное) называется *евклидовым*, если на нем определена симметрическая билинейная форма (x, y) со свойством *положительной определенности*, означающим, что а) $(x, x) \geqslant 0$ для любого вектора $x \in V$ и б) если $(x, x) = 0$, то $x = 0$. Пусть V - евклидово пространство. Обозначим $|x| = \sqrt{(x, x)}$ для $x \in V$. Докажите, что для любых векторов $x, y \in V$ выполняется неравенство $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$.

Задача 2. Пусть V - векторное пространство с симметрической билинейной формой $f(x, y)$, и пусть U - подпространство в V. Подпространство $U^{\perp} = \{x \in V |\ f(x, y) = 0$ для любого вектора $y \in U\}$ называется *ортогональным дополнением к* U относительно формы f. Докажите, что $V \simeq U \oplus U^{\perp}$, тогда и только тогда, когда форма $f|_U$ невырождена.

Задача 3. Пусть V - 3-мерное векторное пространство с ненулевой квадратичной формой F, и $\mathbb{P}^2 = P(V)$ - проективная плоскость. *Коникой в* $\mathbb{P}^2$ называется множество $C = \{x = \langle v \rangle \in \mathbb{P}^2 \mid F(v) = 0\}$. (Это множество C может быть пустым.) Коника C в $\mathbb{P}^2$ называется *невырожденной*, если квадратичная форма F на V невырождена. Пусть $C \neq \emptyset$. *Проективной касательной прямой к конике* C *в точке* $x \in C$ называется такая проективная прямая l в $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку x, что либо $l \subset C$, либо $l \cap C = \{x\}$. Докажите, что если коника $C \neq \emptyset$ невырождена, то в каждой ее точке имеется единственная проективная касательная прямая к C.

Задача 4. Пусть невырожденная коника C в $\mathbb{P}^2$ задана проективных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ уравнением $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$, где $A = (a_{ij})$ - матрица квадратичной формы F в соответствующих координатах (x_0, x_1, x_2) пространства V. Пусть $C \neq \emptyset$. Найдите уравнение проективной касательной прямой к конике C в произвольной точке $y \in C$.

Задача 5. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ - произвольная коника. Докажите, что:
а) C не совпадает с $\mathbb{P}^2$, то есть является собственным подмножеством в $\mathbb{P}^2$ (возможно, пустым);
б) найдутся три точки $y_1, y_2, y_3 \notin C$, не лежащие на одной проективной прямой, то есть такие, что их проективная оболочка совпадает с $\mathbb{P}^2$.

Дополнительные задачи к семинару 8

Задача 1. Пусть V - векторное пространство с квадратичной формой F. Подпространство U в V называется *изотропным относительно формы* F, если ограничение формы F на подпространство U равно 0, то есть если $F(x) = 0$ для любого $x \in U$. Пусть $\dim V = n$, форма F на V невырождена, и U - изотропное подпространство относительно F. Докажите, что $\dim U \leqslant [\frac{n}{2}]$.

Задача 2. Пусть в поле $\mathbf{k}$ уравнение $x^2 + a = 0$ имеет решение для любого $a \in \mathbf{k}$. (Например, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$). В условиях задачи 1 докажите, что существует изотропное относительно F подпространство максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V.

Задача 3. В условиях задачи 2 докажите, что существуют два изотропных относительно F подпространства U и U' максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V такие, что $U \cap U' = \{0\}$.

Дополнительные задачи к семинару 8

Задача 1. Пусть V - векторное пространство с квадратичной формой F. Подпространство U в V называется *изотропным относительно формы* F, если ограничение формы F на подпространство U равно 0, то есть если $F(x) = 0$ для любого $x \in U$. Пусть $\dim V = n$, форма F на V невырождена, и U - изотропное подпространство относительно F. Докажите, что $\dim U \leqslant [\frac{n}{2}]$.

Задача 2. Пусть в поле $\mathbf{k}$ уравнение $x^2 + a = 0$ имеет решение для любого $a \in \mathbf{k}$. (Например, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$). В условиях задачи 1 докажите, что существует изотропное относительно F подпространство максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V.

Задача 3. В условиях задачи 2 докажите, что существуют два изотропных относительно F подпространства U и U' максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V такие, что $U \cap U' = \{0\}$.

Дополнительные задачи к семинару 8

Задача 1. Пусть V - векторное пространство с квадратичной формой F. Подпространство U в V называется *изотропным относительно формы* F, если ограничение формы F на подпространство U равно 0, то есть если $F(x) = 0$ для любого $x \in U$. Пусть $\dim V = n$, форма F на V невырождена, и U - изотропное подпространство относительно F. Докажите, что $\dim U \leqslant [\frac{n}{2}]$.

Задача 2. Пусть в поле $\mathbf{k}$ уравнение $x^2 + a = 0$ имеет решение для любого $a \in \mathbf{k}$. (Например, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$). В условиях задачи 1 докажите, что существует изотропное относительно F подпространство максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V.

Задача 3. В условиях задачи 2 докажите, что существуют два изотропных относительно F подпространства U и U' максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V такие, что $U \cap U' = \{0\}$.

Дополнительные задачи к семинару 8

Задача 1. Пусть V - векторное пространство с квадратичной формой F. Подпространство U в V называется *изотропным относительно формы* F, если ограничение формы F на подпространство U равно 0, то есть если $F(x) = 0$ для любого $x \in U$. Пусть $\dim V = n$, форма F на V невырождена, и U - изотропное подпространство относительно F. Докажите, что $\dim U \leqslant [\frac{n}{2}]$.

Задача 2. Пусть в поле $\mathbf{k}$ уравнение $x^2 + a = 0$ имеет решение для любого $a \in \mathbf{k}$. (Например, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$). В условиях задачи 1 докажите, что существует изотропное относительно F подпространство максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V.

Задача 3. В условиях задачи 2 докажите, что существуют два изотропных относительно F подпространства U и U' максимальной размерности $[\frac{n}{2}]$ в V такие, что $U \cap U' = \{0\}$.