2.8. *Пусть $\tau - T_1 -$топология на $\mathbb{R}$, в которой операции сложения и умножения чисел непрерывны, как отображения из $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \tau\times\tau)$ в $(\mathbb{R};\tau)$ (для сложения) и из $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \tau_0\times\tau)$ в $(\mathbb{R};\tau)$ (для умножения); τ_0 - обычная топология прямой. Доказать, что $\tau=\tau_0$.*

Решение.

1. Докажем, что $\forall a\in\mathbb{R}$ отображение $\mathrm{S}_a : \mathrm{x}\mapsto \mathrm{a}+\mathrm{x}$ есть гомеоморфизм. Во-первых, S_a - биекция и $\mathrm{S}_a^{-1}=\mathrm{S}_{-a}$. Во-вторых, $\mathrm{S}_a = S\circ i_a$, где $i_a : x\mapsto (a;x)$, а S - сложение, и поэтому S_a непрерывно, как и $\mathrm{S}_a^{-1}=\mathrm{S}_{-a}$. Аналогично, что $\forall t\neq 0$ отображение $M_a : \mathrm{x}\mapsto tx$ есть гомеоморфизм. Поэтому, если $W\in\tau$, то $a+W\in\tau$ и $tW\in\tau$.

2. Пусть W есть $\tau-$окрестность нуля *0*. Покажем, что $W\neq\{0\}$. От противного, если $W=\{0\}$, то тогда по 1. все одноточечные множества открыты, т.е. $\tau=\tau_{dis}-$ дискретная топология. Но умножение $M:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \tau_0\times\tau_{dis})\to(\mathbb{R},\tau_{dis})$ разрывно: прообраз $M^{-1}(\{1\})$ - это гипербола $\{(\mathrm{x};\mathrm{y}):\mathrm{xy}=1\}$, не открытое в $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \tau_0\times\tau_{dis})$ множество.

3. Пусть W есть $\tau-$окрестность нуля *0*. Уменьшим и «улучшим» её. Так как умножение непрерывно, то $W'=U_\varepsilon(0)\cdot V(0)\subset W$ для некоторых $U_\varepsilon(0)\in\tau_0,\ \ V(0)\in\tau$. Так как $W'=\bigcup_{|t|<\varepsilon}(\mathrm{t}\cdot \mathrm{V}(0))$, то W' есть $\tau-$окрестность нуля *0*. При этом, если $|\lambda|\le 1$, то $\lambda W'\subset W'$ и $\lambda(-W')\subset(-W')$. Возьмём $\tau-$окрестность $W''=W'\cap(-W')$. Она состоит не из одной точки, симметрична относительно 0 и выпукла. Значит, W'' содержит какой-то обычный интервал с центром в нуле, т.е. содержит τ_0- открытое множество. Вывод: $\tau\subset\tau_0$.

4. Пусть $(-\varepsilon;\varepsilon)\in\tau_0$. По аксиоме T_1 найдём $\tau-$окрестность W нуля с $0{,}9\varepsilon\notin W$. По 3. можно считать, что W выпукла. Проверим, что $W\subset(-\varepsilon;\varepsilon)$. От противного, если $z\in W,\ \ |z|\ge\varepsilon$, то $0{,}9\varepsilon=\dfrac{0{,}9\varepsilon}{z}\cdot z\in t\cdot W,\ \ |t|\le 0{,}9\ \Rightarrow\ 0{,}9\varepsilon\in t\cdot W\subset W$. Противоречие. Итак, любая τ_0- окрестность нуля содержит некоторую $\tau-$окрестность нуля, т.е. $\tau_0\subset\tau$.

2.9. *Пусть K и S компакты в $\mathbb{R}^2$ и $Hausd(\mathrm{K},\mathrm{S})=\inf\ \{\varepsilon>0: S\subset O_\varepsilon(K)\ \&\ K\subset O_\varepsilon(\mathrm{S})\}$. Верно ли что всякая фундаментальная последовательность компактов является сходящейся к некоторому компакту?*

$$O_\varepsilon(\mathrm{K})=\bigcup\{O_\varepsilon(\mathrm{x}):\mathrm{x}\in\mathrm{K}\}\ \text{ - } \textit{обычная } \varepsilon-\textit{окрестность в евклидовой метрике.}$$

Ответ: да, верно.

Для краткости, $Hausd(\mathrm{K},\mathrm{S})=H(K,S)$. То, что это метрика – проверить нетрудно. Пусть $K_1,K_2,\ldots$ последовательность компактов, фундаментальная в метрике $H(\cdot,\cdot)$. Выберем подпоследовательность $K_{n_1},K_{n_2},\ldots$ такую, что $H(K_{n_i},\mathrm{K}_{n_{i+1}})<1/2^{i+1}$.

Оказывается, что $K_{n_1},K_{n_2},\ldots$ сходится к некоторому компакту K_0. Тогда и вся последовательность $K_1,K_2,\ldots$ будет сходиться к K_0 (см. лемму, лекция 4). Для построения искомого K_0, кроме открытых окрестностей $O_\varepsilon(\mathrm{K})=\bigcup\{O_\varepsilon(\mathrm{x}):\mathrm{x}\in\mathrm{K}\}$, нужны и замкнутые окрестности $B_\varepsilon(\mathrm{K})=\bigcup\{\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}):\mathrm{x}\in\mathrm{K}\},\ \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})=\{\mathrm{y}\in\mathbb{R}^2:\mathrm{d}(\mathrm{x};\mathrm{y})\le\varepsilon\}$.

Упражнение. Если K *- компакт, то и* $B_\varepsilon(\mathrm{K})$ *компакт в* $\mathbb{R}^2$.

Определим множество $K_0=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_{1/2^i}(\mathrm{K}_{n_i})$ - это компакт, как пересечение компактов. Докажем, что K_0 непусто. Для этого выберем точки $x_i\in K_{n_i}$ так, чтобы $d(\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_{i+1})<1/2^{i+1}$, что возможно в силу неравенств $H(K_{n_i},\mathrm{K}_{n_{i+1}})<1/2^{i+1}$. Последовательность $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\ldots$ фундаментальна в $\mathbb{R}^2$ и поэтому сходится к некоторой точке x_0. Переходя к $j\to\infty$ в неравенстве

$$d(\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_{i+j})\le d(\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_{i+1})+d(\mathrm{x}_{i+1},\mathrm{x}_{i+2})+\ldots+d(\mathrm{x}_{i+j-1},\mathrm{x}_{i+j})<1/2^{i+1}+\ldots+1/2^{i+j}<1/2^i$$

получаем $d(x_i, x_0) \le 1/2^i$, т.е. $x_0 \in B_{1/2^i}(K_{n_i})$ для каждого i. Значит, $x_0 \in \bigcap B_{1/2^i}(K_{n_i}) = K_0$ - непусто.

Оценим $H(K_{n_i}, K_0)$. По построению $K_0 \subset B_{1/2^i}(K_{n_i})$. Проверим, что $K_{n_i} \subset B_{1/2^i}(K_0)$. Тогда получится, что $H(K_{n_i}, K_0) \le \varepsilon_i$ для любого $\varepsilon_i > 1/2^i$. Взяв $\varepsilon_i = 1/2^{i-1}$, получим $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots \to K_0$.

Итак, зафиксируем i, и возьмём **любую** точку $z \in K_{n_i}$. Как и выше, но двигаясь от i по индексам и к $+\infty$, и к 1 выберем $z_1 \in K_{n_1}, \ldots, z_{i-1} \in K_{n_{i-1}}, z_i = z \in K_{n_i}, z_{i+1} \in K_{n_{i+1}}, z_{i+2} \in K_{n_{i+2}}, \ldots$ так, чтобы $d(z_j, z_{j+1}) < 1/2^{j+1}$. Как и выше, $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i = z, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots \to z_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} B_{1/2^j}(K_{n_j}) = K_0$ и
$d(z, z_0) = d(z_i, z_0) \le 1/2^i$, т.е. $K_{n_i} \subset B_{1/2^i}(K_0)$.