Экзамен ВвВТ, СовБак. 15 марта, четверг.

Первые вопросы (определения, формулировки, примеры)

1. Предел последовательности (на числовой прямой и в метрическом пр-ве)
2. Непрерывность числовой функции и отображения метрических пространств.
3. Метрическое пространство. Примеры метрик.
4. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства.
5. Эквивалентные определения компактности подмножества евклидова пространства.
6. Эквивалентные определения компактности подмножества метрического пространства.
7. Равномерная метрика в пространстве C[a;b] . Полнота C[a;b] .
8. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства.
9. Критерий полноты метрических пространств («вложенные шары»).
10. Вполне ограниченность. Критерий компактности в метрических пространствах.
11. Критерий компактности в пространстве C[a;b] .
12. Всюду плотные и нигде не плотные подмножества метрического пространства.
13. Аксиомы отделимости топологических пространств.
14. Непрерывные отображения топологических пространств.
15. Прямая Зоргенфрея («стрелка») и её свойства.
16. Топология декартова произведения во множестве $[0;1]^A$.
17. Топология поточечной сходимости в пространстве непрерывных функций на отрезке.

Вторые вопросы (доказательства).

1. Доказать эквивалентность утверждений для числового множества X:
(А) X замкнуто и ограничено;
(Б) Любая функция непрерывная на X достигает наименьшего и наибольшего значений.

2. Доказать эквивалентность утверждений для числового множества X:
(А) Из всякой последовательности элементов множества X можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из X;
(Б) Из всякого открытого покрытия множества X можно выделить конечное подпокрытие.

3. Доказать эквивалентность утверждений для метрического пространства X:
(А) Любая функция непрерывная на X ограничена на X.
(Б) Любая функция непрерывная на X достигает наименьшего и наибольшего значений.

4. Доказать для подмножества X метрического пространства, что из (А) следует (Б):
(А) Из всякой последовательности элементов X можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из X;
(Б) Из любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

5. Доказать для метрического пространства (M,ρ) эквивалентность утверждений:
(А) (M,ρ) полно; (Б) Любая последовательность вложенных замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет общую (единственную) точку.

6. Доказать для метрического пространства (M,ρ) эквивалентность утверждений:
(А) M компактно; (Б) M полно и вполне ограничено.

7. Доказать что для подмножества C[a;b] из (А) следует (Б) и привести схему доказательства обратного утверждения: (А) подмножество вполне ограничено; (Б) оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

8. Доказать основные свойства связных множеств и непрерывных числовых функций на них.

9. Доказать, что отрезок и квадрат не гомеоморфны между собой.

10. Доказать, что в полном метрическом пространстве пересечение счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно.

11. Доказать, что существуют непрерывные не монотонные ни на каком интервале числовые функции и что, более того, множество таких функций всюду плотно в C[a;b].

12. Доказать, что $\mathrm{d}: X \times X \to [0;+\infty)$, $d(x, y) \overset{def}{=} \varphi(\rho(\mathrm{x};\mathrm{y}))$ является метрикой, эквивалентной метрике $\rho: X \times X \to [0;+\infty)$, если $\varphi:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ возрастает, вогнута, непрерывна и $\varphi(0)=0$,

13. Доказать компактность декартова произведения двух компактных топологических пространств.

14. Доказать, что «стрелка» имеет счетную локальную базу в каждой точке, сепарабельна, не имеет счётной базы, нормальна.

15. Доказать, что топология декартова произведения во множестве $[0;1]^A$ метризуема в том и только том случае, когда множество A конечно или счётно.