

**Группы и алгебры Ли II**  
**ДЗ 1**

- 1.** Разложите на неприводимые компоненты тензорное произведение фундаментальных представлений  $V_{\omega_1}$  и  $V_{\omega_3}$  алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_4$ . Вычислите характеры каждого из неприводимых слагаемых.
- 2.** Пусть  $K = ef + fe + h^2/2$  – стандартный оператор Казимира для алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$ . Найдите собственные значения  $K$  и их кратности при действии на тензорном произведении двух копий присоединённого представления  $\mathfrak{sl}_2$ .
- 3.** Рассмотрим подалгебру  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_3$ , состоящую из всех матриц  $(a_{i,j})_{i,j=1}^3$ , таких что  $a_{i,2} = a_{2,j} = 0$  для всех  $i, j$ . Разложите, явно предъявив неприводимые слагаемые, присоединённое представление  $\mathfrak{g}$  на  $\mathfrak{sl}_3$  на неприводимые компоненты.
- 4.** Найдите корневое разложение для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4$ .
- 5.** Найдите корневое разложение для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_5$ .
- 6.** Вычислите дифференциал отображения  $\det : \text{Mat}_n \rightarrow \mathbb{C}$ .