

Семинар 9.

Коника в проективной плоскости

Задача 1. Напомним некоторые определения и обозначения. $\mathbf{k}$ – поле характеристики $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$, $A = (a_{ij}) \in M(3, \mathbf{k})$ – ненулевая симметрическая матрица, и $\mathbb{P}^2$ – проективная плоскость над полем $\mathbf{k}$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Коникой в $\mathbb{P}^2$ называется множество $C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid \Phi(x) = 0\}$, где $\Phi(x) := \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j = 0$. Матрицу A будем называть *матрицей, задающей конику C* . Коника C в $\mathbb{P}^2$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, т. е. $\text{rank } A = 3$. *Проективной касательной прямой к конике C в точке $X \in C$* называется такая проективная прямая l в $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку X , что либо $l \subset C$, либо $l \cap C = \{X\}$. Обозначение касательной в точке Y : $l = T_Y C$. Докажите, что если $\text{rank } A \leq 2$, где A – матрица, задающая конику C , то существует точка $Y \in C$ такая, что имеется не единственная касательная проективная прямая к C в точке Y .

Задача 2. 1) Докажите, что если $\text{rank } A = 2$, то вышеуказанная точка Y единственна, и найдите ее координаты.

2) Докажите, что если при этом коника C имеет еще хотя бы одну точку X , отличную от Y , то она распадается в объединение двух различных прямых, пересекающихся в точке Y , одна из которых есть прямая XY .

Задача 3. Докажите, что если $\text{rank } A = 1$, то вышеуказанная точка Y есть любая точка коники C ; при этом C есть проективная прямая l с уравнением, скажем, $L(x) = 0$, и квадратичная форма $\Phi(x)$ есть (с точностью до ненулевого множителя) квадрат линейной формы $L(x)$. (В этом случае конику C называют *сдвоенной прямой l* .)

Задача 4. Пусть C – невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$, и $Y = (y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^2$ – произвольная точка. Проективную прямую p_Y с уравнением $\Phi(x, y) := \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i y_j = 0$ назовем *полярой точки Y* относительно коники C .

1) Пусть $Y \notin C$. Покажите, что $Y \notin p_Y$ и для произвольной прямой l , проходящей через точку Y и пересекающей поляру p_Y в точке X , а конику C в паре различных точек A и B , четверка точек $ABXY$ – гармоническая.

2) Что можно сказать про отображение f плоскости $\mathbb{P}^2$ в двойственную проективную плоскость $\mathbb{P}^2$, сопоставляющее произвольной точке Y ее поляру p_Y относительно коники C . Существует ли обратное к нему отображение f^{-1} ?

Задача 5. Пусть C – невырожденная коника.

1) Покажите, что поляра p_Y точки $Y \notin C$ пересекает конику C в паре различных точек P и Q , причем прямые PY и QY – касательные к конике C в точках P и Q соответственно, т. е. $PY = T_P C$ и $QY = T_Q C$.

2) Покажите, что если $Z \in p_Y$, то и $Y \in p_Z$.

3) Покажите, что если $Y \in C$, то $p_Y = T_Y C$.

Дополнительные задачи к семинару 9

Задача 1. Назовем проективное отображение $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$, $Y \mapsto p_Y$, построенное в задаче 4.2 основного задания, *поляритетом относительно коники* C . Является ли f^{-1} поляритетом? Если да, то относительно коники с каким уравнением (в координатах в плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, двойственных к координатам в плоскости $\mathbb{P}^2$)?

Задача 2. На вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ нарисована коника C с уравнением $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ в подходящей проективной системе координат. Дана точка $X \notin C$. С помощью линейки постройте поляру p_X точки X относительно коники C .

Задача 3. В условиях задачи 2 дана точка $X \in C$. С помощью линейки постройте касательную прямую $T_X C$ к конике C в точке X .

Задача 4. В условиях задачи 2 для всякой прямой l в $\mathbb{RP}^2$ определена единственная точка $X \in \mathbb{RP}^2$, для которой $l = p_X$, называемая *полюсом прямой* l относительно коники C . (Существование и единственность полюса следует из задачи 1.) Для данной прямой l с помощью линейки постройте ее полюс относительно C .

Дополнительные задачи к семинару 9

Задача 1. Назовем проективное отображение $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$, $Y \mapsto p_Y$, построенное в задаче 4.2 основного задания, *поляритетом относительно коники* C . Является ли f^{-1} поляритетом? Если да, то относительно коники с каким уравнением (в координатах в плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, двойственных к координатам в плоскости $\mathbb{P}^2$)?

Задача 2. На вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ нарисована коника C с уравнением $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ в подходящей проективной системе координат. Дана точка $X \notin C$. С помощью линейки постройте поляру p_X точки X относительно коники C .

Задача 3. В условиях задачи 2 дана точка $X \in C$. С помощью линейки постройте касательную прямую $T_X C$ к конике C в точке X .

Задача 4. В условиях задачи 2 для всякой прямой l в $\mathbb{RP}^2$ определена единственная точка $X \in \mathbb{RP}^2$, для которой $l = p_X$, называемая *полюсом прямой* l относительно коники C . (Существование и единственность полюса следует из задачи 1.) Для данной прямой l с помощью линейки постройте ее полюс относительно C .

Дополнительные задачи к семинару 9

Задача 1. Назовем проективное отображение $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$, $Y \mapsto p_Y$, построенное в задаче 4.2 основного задания, *поляритетом относительно коники* C . Является ли f^{-1} поляритетом? Если да, то относительно коники с каким уравнением (в координатах в плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, двойственных к координатам в плоскости $\mathbb{P}^2$)?

Задача 2. На вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ нарисована коника C с уравнением $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ в подходящей проективной системе координат. Дана точка $X \notin C$. С помощью линейки постройте поляру p_X точки X относительно коники C .

Задача 3. В условиях задачи 2 дана точка $X \in C$. С помощью линейки постройте касательную прямую $T_X C$ к конике C в точке X .

Задача 4. В условиях задачи 2 для всякой прямой l в $\mathbb{RP}^2$ определена единственная точка $X \in \mathbb{RP}^2$, для которой $l = p_X$, называемая *полюсом прямой* l относительно коники C . (Существование и единственность полюса следует из задачи 1.) Для данной прямой l с помощью линейки постройте ее полюс относительно C .