Глава III. Функции многих переменных

Лекция 10. Дифференциал функции

1 Определение непрерывной функции многих переменных

Дается дословно так же, как определение непрерывной функции одной переменной.

2 Напоминание:

три определения производной функции одного переменного:
- предел разностного отношения;
- главная линейная часть приращения;
- тангенс угла наклона касательной.

На многомерный случай обобщается второе определение.

3 Дифференциал функции

Определение 1 *Дифференциал функции–это главная линейная часть ее приращения:*

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + o(h),$$

где l–линейный функционал.

4 Касательное пространство

Определение 2 *Касательное пространство в точке $x \in \mathbb{R}^n$–это пространство векторов-стрелок $\xi = [x, x+\xi]$, приложенных в точке x. Оно изоморфно $\mathbb{R}^n$: $[x, x+\xi] \mapsto \xi$. Операции наследуются. Обозначение: $T_x\mathbb{R}^n$.*

Дифференциал функции–линейный функционал на касательном пространстве, l : $\xi \mapsto l(\xi)$. Обозначение $l = df(x)$; $df(x;\xi) = l(\xi)$.

5 Производная функции вдоль вектора

$$L_\xi f(x) = \frac{d}{dt} f(x + t\xi)|_{t=0}.$$

lem:gato **Лемма 1** *Производная функции вдоль вектора есть значение дифференциала на этом векторе.* $L_\xi f(x) = df(x;\xi)$.

Доказательство $f(x + t\xi) - f(x) = df(x; t\xi) + o(t\xi) = tdf(x, \xi) + o(t)$;

$$L_\xi f(x) = \lim df(x, \xi) + \frac{o(t)}{t} = df(x, \xi).$$

□

Определения: векторное поле; производная функции вдоль векторного поля.

6 Производные по Гато и Фреше. Частные производные

Дифференциал функции называется *производной по Фреше*. Производная функции вдоль вектора называется *производной по Гато*.

Возьмем базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим постоянные векторные поля в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = L_{e_j} f.$$

Предложение 1 *Пусть* $e_1, \ldots, e_n$*–ортонормированный базис,* $x_1, \ldots, x_n$, $dx_1, \ldots, dx_n$*–соответствующие координаты в* $\mathbb{R}^n$ *и в касательных пространствах. Тогда*

$$df = D_1 f dx_1 + \cdots + D_n f dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Другими словами:

$$df(x;\xi) = D_1 f(x)\xi^1 + \cdots + D_n f(x)\xi^n.$$

7 Частные производные и непрерывность

Функция, имеющая частные производные во всех точках, может не быть непрерывной (приведите пример).

Функция, имеющая дифференциал в каждой точке, называется *дифференцируемой.*

Теорема 1 *Дифференцируемая функция непрерывна.*

8 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 2 *Функция, имеющая непрерывные частные производные, дифференцируема.*