Лекция 11-18. Градиент. Старшие производные

1 Норма линейного функционала.

Норма линейного функционала определена, если линейное пространство наделено дополнительной структурой: скалярным произведением, или, в более общем случае, нормой. Пусть $\mathbb{R}^n$–евклидово пространство, $|x| = \sqrt{(x,x)}$– соответствующая норма.

Определение 1 *Нормой линейного функционала l называется*

$$||l|| = \frac{\sup_{x \neq 0} |l(x)|}{|x|}$$

2 Градиент.

Определение 2 *Градиент функции–это вектор, скалярное произведение на который дает дифференциал функции:*

$$df(x;\xi) = (grad\ f(x), \xi).$$

Теорема 1 *Всякий линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ есть скалярное произведение на некоторый вектор.*

В ортонормированном базисе

$$(\text{grad } f)(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)). \tag{1}$$

Следствие 1 *Норма дифференциала равна модулю градиента.*

Задача 1 *Градиент задает направление наибыстрейшего роста функции.*

3 Теорема о конечном приращении.

Это–аналог теоремы о среднем в одномерном анализе.

Теорема 2 *Пусть f–дифференцируемая функция в выпуклой области евклидова пространства, и $||df|| \leq L$. Тогда $|f(x+h) - f(x)| \leq L|h|$.*

4 Необходимое условие наличия экстремума.

Теорема 3 *C^1–гладкая функция в открытой области имеет экстремум только в тех точках, где ее дифференциал равен нулю.*

Докажите, что обратное неверно.

5 Старшие производные.

Фиксируем координаты в $\mathbb{R}^n$. Частные производные первого порядка от функции f– это $D_j f$. Определим по индукции частную производную порядка m как результат m-кратного применения операторов D_j, взятых в произвольном порядке.

6 Теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема 4 *На функциях с непрерывными вторыми частными производными, операторы D_i, D_j коммутируют:*

$$D_j D_i f = D_i D_j f. \tag{2}$$

Доказательство Достаточно доказать теорему для функции двух переменных и операторов D_1 и D_2. Фиксируем точку (x, y). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(h_1, h_2) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - f(x, y + h_2) + f(x, y).$$

Мы докажем, что

$$F(h_1, h_2) = D_1 D_2 f(x, y) h_1 h_2 + o(h_1 h_2) = D_2 D_1 f(x, y) h_1 h_2 + o(h_1 h_2). \tag{3}$$

Отсюда следует (2).

Докажем (3). Рассмотрим два выражения для функции F, использующие формулу Нmютона-Лейбница; в одном интегрирование происходит по вертикальным отрезкам, в другом– по горизонтальным. Равенство этих двух выражений даст формулу (3).

$$F(h_1, h_2) = [f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)] - [f(x + h_1, y) - f(x, y)] =$$

$$\int_0^{h_1} D_1 f(x + t_1, y + h_2) dt_1 - \int_0^{h_1} D_1 f(x + t_1, y) dt_1 =$$

$$\int_0^{h_1} [D_1 f(x + t_1, y + h_2) - D_1 f(x + t_1, y)] dt_1.$$

Выражение под интегралом по теореме о среднем имеет вид:

$$D_1 f(x + t_1, y + h_2) - D_1 f(x + t_1, y) = D_2 D_1 f(x + t_1, y + \theta(t_1)) \cdot h_2,\ \theta(t_1) \in [0, h_2].$$

В силу непрерывности вторых частных производных

$$D_2 D_1 f(x+t_1, y+\theta(t_1)) = D_2 D_1 f(x,y) + o(1).$$

Весь интеграл равен

$$F(h_1,h_2) = D_2 D_1 f(x,y) h_1 h_2 + o(1) h_1 h_2.$$

Представление функции F в виде

$$F(h_1,h_2) = [f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y)] - [f(x, y+h_2) - f(x,)]$$

с помощью аналогичных рассуждений дает:

$$F(h_1,h_2) = D_2 D_1 f(x,y) h_1 h_2 + o(1) h_1 h_2.$$

Это доказывает утверждение (3), а с ним и всю теорему. $\square$