Лекция 9. Рациональность квадрики. Работа силы. Несобственные интегралы

1 Рациональные функции от x и $\sqrt{p_2(x)}$

Теорема 1 *Интеграл от рациональной функции от x и $y = \sqrt{ax^2+b}$ сводится к интегралу от рациональной функции. При $b > 0$ это делается с помощью замены:*

$$x(t) = \frac{2t\sqrt{b}}{a - t^2}$$

при $b < 0$

$$x(t) = \frac{\sqrt{-ab}(t^2 + \frac{1}{a})}{at^2 - 1}.$$

При такой подстановке $\sqrt{ax^2(t) + b}$ оказывается рациональной функцией $y = \sqrt{ax^2+b}$ при $b > 0$ и $\frac{\sqrt{-ab}2t}{at^2-1}$ при $b < 0$. Это загадочное упрощение объясняется *рациональностью квадрики.*

2 Рациональность квадрики

Квадрикой (а также коникой) называется любая кривая второго порядка на плоскости, т.е. кривая вида $p_2(x, y) = 0$, где p_2–многочлен второй степени.

Определение 1 *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ называется рациональным, если оно задается рациональными функциями $R_j : t \mapsto (x, y) = (R_1(t), R_2(t))$.*

Определение 2 *Кривая на плоскости называется рациональной, если существует рациональная биекция прямой на эту кривую.*

Теорема 2 *Всякая квадрика, вещественная или комплексная, рациональна.*

Доказательство проводится с помощью стереографической проекции из точки квадрики на прямую. Рациональность квадрики объясняет, почему описанная выше подстановка заменяет корень рациональной функцией и позволяет эту подстановку найти.

3 Работа силы

Напоминание из физики. Работа постоянной силы, направленной вдоль прямолинейного пути, равна величине этой силы, умноженной на длину пути. Чтобы посчитать работу переменной силы, направленной вдоль прямолинейного пути, надо этот путь разбить на маленькие отрезки, на каждом из них считать силу постоянной и найти сумму работ по всем отрезкам разбиения, а потом перейти к пределу по измельчающимся разбиениям. Получится интеграл Римана от силы по отрезку.

Определение 3 *Работа силы f, направленной вдоль прямолинейного пути $[a, b]$ равна $\int_a^b f(x)dx$.*

Это - одна из мотивировок определения интеграла по Риману.

Существенно более тонкое определение работы силы вдоль пространственной кривой дается в терминах интегрирования (простейших) дифференциальных форм и будет рассказано позже.

4 Определение несобственного интеграла

def:non **Определение 4** *Несобственными интегралами называются:*

a) интеграл от неограниченной непрерывной функции на конечном полуинтервале

b) интеграл от ограниченной непрерывной функции на бесконечном интервале

c) их линейные комбинации.

Эти интегралы определяются так:

a) если $f \in C(a, b],\ a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx; \qquad (1)$$ eqn:non

b) если $f \in C[a, \pm\infty)$, то

$$\int_a^{\pm\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \pm\infty} \int_a^A f(x)dx \qquad (2)$$ eqn:non1

c) на линейные комбинации интегралов a) и b) определение распространяется по линейности.

Примеры 1

$$1) \qquad \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \searrow} \int_\varepsilon^1 \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_0^1 = -1.$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A \to \infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{-A}^{A} = \pi.$$

5 Абсолютная и условная сходимость.

def:conv **Определение 5** *Несобственный интеграл называется сходящимся (в точке a или на ∞), если предел (1) или (2) существует, и расходящимся в противном случае.*

def:abs **Определение 6** *Несобственный интеграл сходится абсолютно, если существует предел (1) или (2) для $|f|$ вместо f, и условно в противном случае.*

Примеры 2

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ абсолютно сходится}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \text{ расходится}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ сходится условно, но не абсолютно.}$$

6 Теорема сравнения.

def:comp **Определение 7** *Скажем, что $f \prec g$ на ∞ (g мажорирует f на ∞), если существуют такие $c > 0$ и A, что $|f(x)| < cg(x)$ при $x \in [A, \infty)$.*

thm:comp **Теорема 3** *Пусть g мажорирует f на ∞. Тогда:*

a) если интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно;

b) если интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ тоже расходится.

Эта теорема является основным средством при установлении сходимости интегралов.

Примеры 3 1. $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^{2018}}{x^{1+\frac{1}{2018}}} dx$ *сходится,* поскольку подинтегральная функция мажорируется $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon = \frac{1}{2019}$ *(степень сильнее логарифма).*

2. $\int_1^\infty x^{2018} e^{-\frac{x}{2018}} dx$ *сходится, поскольку подинтегральная функция мажорируется* $g(x) = e^{-\varepsilon x}$, $\varepsilon = \frac{1}{2019}$ *(экспонента сильнее степени).*

7 Интегральный признак сходимости рядов

Теорема 4 *Пусть f - монотонно убывающая функция $[1, \infty) \to \mathbb{R}$, стремящаяся к нулю на бесконечности. Тогда ряд $\sum f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$.*