

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2018
Листок 4

срок сдачи 20.03.2018

1. Покажите, что если целая функция $f(z)$ принимает вещественные значения на вещественной оси и чисто мнимые на мнимой, то она нечётна.

2. Найдите вычеты ветвей формы $\exp\left(\frac{1}{1+\sqrt{z}}\right)dz$ в точке $z = 1$

3.

а) Вычислите

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

б) Найдите сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6 + \dots$$

в) Для ветви функции $f(z)$ заданной в окрестности $z = 0$ разложением

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{z^2}{1+x^2}\right)^n dx$$

найдите значение аналитического продолжения $f(\gamma_i \cdot 0)$ её ростка из точки $z = 0$ по путям $\gamma_1 = -1 + e^{it}$ и $\gamma_2 = 1 - e^{-it}$, где $t \in [0, 2\pi]$

4. Вычислите интегралы

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}, \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x} dx \quad \text{в) } \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{zt}(1+e^{-\pi z})}{z^2+1} dz, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

5. Пусть α, β иррациональные числа, $a_{1,2,3,4}$ произвольные несовпадающие комплексные. Покажите, что для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a_1} + \frac{\alpha}{z-a_2} + \frac{i}{z-a_3} + \frac{i\beta}{z-a_4} \right) y$$

график всякого ненулевого решения плотен в \mathbb{C}^2 .

6. Докажите, что фазовый портрет голоморфного в области векторного поля не может иметь предельных циклов (изолированных замкнутых орбит)¹

¹ **Указание:** Можно пользоваться теоремами существования и единственности и аналитической зависимости от начальных условий для комплексных дифференциальных уравнений.