ЛИСТОК 1

Задача 1. Докажите, что в каждой компоненте связности графа количество вершин нечетной степени четно.

Задача 2. Пусть γ — путь (не обязательно простой) в графе, соединяющий вершины A и B. Докажите, что в том же графе существует простой путь, соединяющий A и B и проходящий только по тем ребрам, по которым путь γ прошел нечетное число раз.

Задача 3. Связный граф называется эйлеровым, если в нем существует замкнутый путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. а) Докажите, что степень каждой вершины в эйлеровом графе четна. б) Докажите, что эйлеров граф является объединением простых циклов, не имеющих общих ребер (но, вероятно, имеющих общие вершины). в) Докажите, что если граф G связен и является объединением простых циклов, не имеющих общих ребер (но, возможно, имеющих общие вершины), то G — эйлеров граф. г) Докажите, что всякий связный граф, в котором степени всех вершин четны, является эйлеровым.

Указание (к пункту 3в)**.** Для графа G рассмотрите вспомогательный граф, вершины которого — простые циклы, объединением которых является G, а две вершины соединены ребром, если соответствующие циклы пересекаются (имеют общую вершину). Докажите, что этот граф связный и посмотрите, что с ним будет, если из него изъять одну вершину вместе с прилегающими ребрами. После этого проведите доказательство индукцией по числу простых циклов.

Задача 4. а) Докажите, что в каждой компании из 6 человек имеются либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. б) Докажите, что существует число N такое, что в каждой компании из N человек имеются либо четверо попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых? Укажите как можно меньшее значение N.

Задача 5. Докажите, что в каждом связном графе имеется подграф, включающий все вершины и являющийся деревом.

Задача 6. Пусть G — граф, в котором v_0 вершин, v_1 ребер и h_0 компонент связности. а) Докажите, что имеет место неравенство $v_1 \geq v_0 - h_0$, причем равенство достигается в том и только том случае, когда каждая компонента связности графа — дерево. б) Пусть F_G — векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, элементами которого являются функции $f : V_1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (где V_1 — множество ребер графа G), удовлетворяющих следующему условию: если ребра $e_1, \ldots, e_k \in V_1$ образуют цикл, то $f(e_1) + \cdots + f(e_k) = 0$. Докажите, что $\dim F_G = v_0 - h_0$.

Задача 7*. Докажите, что во всяком дереве с $n > 1$ вершинами имеется по крайней мере две вершины степени 1 (“висячие”).

Задача 8*. Пусть T — дерево, вершины которого занумерованы от 1 до n. Определим числовую последовательность $b(T) = (b_1, \ldots, b_{n-2})$ по индукции следующим образом. Пусть a — самый большой номер “висячей” вершины дерева; тогда b_1 — номер ее “родителя” (единственной вершины, которая соединена с a ребром). Удалим теперь из дерева T вершину a вместе с ребром ab_1; полученное дерево обозначим T'. Тогда по определению $b(T') = (b_2, \ldots, b_{n-1})$ (индукция!). Последовательность $b(T)$ называется кодом Прюфера дерева T. а) Докажите, что код Прюфера полностью определяет дерево: если $b(T_1) = b(T_2)$, то $T_1 = T_2$ (как деревья с нумерованными вершинами). б) Докажите, что любая последовательность $b_1, \ldots, b_{n-2}$, где все $b_i \in \{1, \ldots, n\}$, является кодом Прюфера некоторого дерева с n вершинами. Найдите общее количество деревьев с n вершинами, занумерованными $1, \ldots, n$.

Задача 9*. Пусть T — дерево, вершины которого занумерованы от 1 до n, а ребра — от 1 до $(n-1)$. Обозначим a_i, b_i концы i-го ребра ($i = 1, \ldots, n-1$). Докажите, что произведение транспозиций $(a_1 b_1)(a_2 b_2) \ldots (a_{n-1} b_{n-1})$ (в группе перестановок S_n) — циклическая перестановка.

Указание. Докажите индукцией по $k = 1, \ldots, n-1$, что произведение транспозиций $(a_1 b_1)(a_2 b_2) \ldots (a_k b_k)$ — перестановка (элемент S_n), раскладывающаяся в произведение $n - k$ непересекающихся циклов.