

## ЛИСТОК 2

**Задача 1.** а) Докажите для произвольного  $n$  равенство  $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$ . б) Докажите равенство  $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots = \frac{1}{1-q}$  (в левой части — бесконечное произведение); дайте точное определение выражений в левой и правой части. в) Докажите, что произвольное натуральное число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. г) Объясните все возможные связи (что из чего следует) между пунктами 1а, 1б и 1в.

**Задача 2.** Даны следующие определения чисел  $\binom{n}{k}$  (где  $0 \leq k \leq n$ ): 1)  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ; 2)  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  и  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  для всех  $0 < k < n$ ; 3)  $\binom{n}{k}$  — количество  $k$ -элементных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ; 4)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$ ; 5)  $\binom{n}{k}$  — количество решений уравнения  $x_1 + \dots + x_{k+1} = n - k$  в целых неотрицательных числах; 6)  $\binom{n}{k}$  — количество путей в прямоугольнике  $k \times (n-k)$ . Каждый путь начинается в левом нижнем углу, заканчивается в правом верхнем и представляет собой ломаную из  $n$  горизонтальных и вертикальных звеньев длины 1. а) Докажите, что определение 1 эквивалентно определениям 2 и 3. б) Докажите, что определение 2 эквивалентно определениям 3, 4, 5 и 6. в) Докажите, что определение 3 эквивалентно определениям 4, 5 и 6. г\*) Докажите, что определение 4 эквивалентно определениям 5 и 6. д) Докажите, что определение 5 эквивалентно определению 6. Все доказательства эквивалентностей следует производить напрямую, не ссылаясь на результаты других пунктов.

**Задача 3.** Определим  $\exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  и  $\ln(1+t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n/n$ . а) Дайте определение производной степенного ряда и докажите, что  $\exp'(x) = \exp(x)$  и  $\ln'(1+t) = 1/(1+t)$ . б) Докажите, что  $\exp(\ln(1+t)) = 1+t$  (и дайте определение композиции в левой части равенства). в) Докажите, что  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ .

**Указание** (к пункту 3б). Вычислите производную левой части равенства. Докажите, что полученному уравнению удовлетворяет только  $c(1+t)$ , где  $c$  — произвольная константа.

**Задача 4.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; определим  $(1+t)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \dots$  а) Докажите равенство  $((1+t)^\alpha)' = \alpha(1+t)^{\alpha-1}$ . б) Докажите равенство  $\exp(\alpha \ln(1+t)) = (1+t)^\alpha$ . в) Докажите равенство  $(1+t)^\alpha (1+t)^\beta = (1+t)^{\alpha+\beta}$ . г) Докажите равенство  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = (1-4t)^{-1/2}$ . д) Докажите равенство  $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}$ . Как связано это равенство с результатами пунктов 4г и 4в?

**Указание** (к пункту 4б). Вычислите производную правой и левой части.

**Задача 5.** Назовем число  $n$  хорошим, если  $\binom{n}{k}$  — четное число для всех  $1 \leq k \leq n-1$ . Например, число  $n=4$  — хорошее ( $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ ,  $\binom{4}{2} = 6$ ), а число  $n=6$  — нет ( $\binom{6}{2} = 15$ ). а) Докажите, что если  $n$  — хорошее число, то  $\binom{n-1}{k}$  — нечетное число для всех  $0 \leq k \leq n-1$ . б) Докажите индукцией по  $m$ , что если  $n$  — хорошее число и  $0 \leq k \leq m \leq n-1$ , то  $\binom{m}{k}$  и  $\binom{n+m}{k}$  имеют одинаковую четность. в) Докажите, что если  $n$  — хорошее число, то  $2n$  — тоже хорошее число. Выведите отсюда, что все числа вида  $2^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — хорошие. г) Докажите, что других хороших чисел (кроме степеней 2) не существует. д) Нарисуйте (в масштабе) первые  $2^{100}$  строк треугольника Паскаля mod 2: четные числа обозначайте белыми точками, а нечетные — черными.

**Задача 6.** а) Пусть  $F_n$  — множество подмножеств множества  $\{1, \dots, n\}$ , не содержащих соседних чисел. Докажите, что количество элементов в множестве  $F_n$  —  $(n+1)$ -е число Фибоначчи. б) Пусть  $R_n(q) = \sum_{\{a_1, \dots, a_m\} \in F_n} q^{a_1 + \dots + a_m}$ . (Если  $m = 0$ , то есть множество пустое, сумма считается равной 0.) Выведите рекуррентную формулу, выражающую  $R_n(q)$  через  $R_{n-1}(q)$  и  $R_{n-2}(q)$ . в) Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$ .

**Задача 7.** а) Докажите, что количество  $p_k(n)$  решений уравнения  $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = n$  в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения  $y_1 + \dots + y_k = n$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$ . б) Докажите, что  $p_k(n)$  равно количеству решений уравнения  $y_1 + \dots + y_n = n$  в целых числах, удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq k$ . в) Докажите равенство  $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k)}$ . г) Пусть  $p(n)$  — количество целочисленных решений уравнения  $y_1 + \dots + y_n = n$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ . Докажите равенство  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots}$  (в знаменателе бесконечное произведение).

**Указание.** Целочисленные решения уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ , удовлетворяющие неравенствам  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ , называются *разбиениями* (числа  $n$  на  $k$  частей). Их полезно изображать в виде *диаграмм Юнга*: ступенчатая фигура, выровненная по левому краю; нижняя строка содержит  $x_1$  клеток, следующая —  $x_2$  клеток, и т.д.; всего  $n$  клеток и  $k$  строк.

**Задача 8\*.** Пусть  $r(n)$  — количество наборов целых чисел  $(x_1, \dots, x_k)$  (со всевозможными  $k$ ), в которых  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$  и  $x_1 + \dots + x_k = n$ . а) Докажите равенство  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)t^n = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots$  б) Докажите равенство  $(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\dots}$  (в знаменателе показатели — всевозможные нечетные числа). в) Докажите, используя результат пунктов 8\*а и 8\*б, что  $r(n)$  равно количеству решений уравнения  $y_1 + \dots + y_n = n$  в целых положительных нечетных числах, удовлетворяющих неравенствам  $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ . г) Докажите тот же результат, не используя пунктов 8\*а и 8\*б, а построив явное взаимно однозначное соответствие между множеством решений  $(y_1, \dots, y_n)$  уравнения из пункта 8\*в и множеством наборов  $(x_1, \dots, x_k)$  из определения  $r(n)$ .