

Семинар 10.

Коника в проективной и аффинной плоскости

Задача 1. В $\mathbb{CP}^2$ даны коника $C = \{x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 = 0\}$ и прямая $l = \{x_0 = 0\}$. Имеются ли точки пересечения коники C с прямой l ? Если да, то найдите эти точки и уравнения касательных проективных прямых к C в этих точках.

Задача 2. *Аффинной коникой* (или *коникой в аффинной плоскости*) над $\mathbf{k}$ называется множество точек в аффинной плоскости над $\mathbf{k}$, удовлетворяющих уравнению $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + c = 0$, где $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{k}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, в некоторой аффинной системе координат (x, y) . Перечислите все различные типы коник в комплексной аффинной плоскости.

Задача 3. Перечислите все различные типы коник в вещественной аффинной плоскости.

Задача 4. Найдите уравнение вещественной аффинной коники, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t + 2}, \quad y(t) = \frac{t^2 + t}{t + 2}.$$

Задача 5. Какое условие нужно наложить на коэффициенты уравнения

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + c = 0$$

аффинной коники C , чтобы ее проективное замыкание $\overline{C}$ касалось несобственной прямой?

Дополнительные задачи к семинару 10

Задача 1. Найдите общий вид проективного преобразования вещественной проективной плоскости, отображающего окружность $\omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ в гиперболу $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$, а точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ окружности ω в несобственные точки гиперболы C , лежащие на асимптотах $\{x - y = 0\}$ и $\{x + y = 0\}$ соответственно. (Уравнения указаны в аффинной карте $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$.)

Задача 2. а) Найдите полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно вещественной аффинной коники $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$.

б) Найдите центр аффинной коники $2x^2 + 8xy + 5y^2 - 12y - 2 = 0$.

Задача 3. Найдите такую рациональную параметризацию окружности с уравнением

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра t числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны.

Дополнительные задачи к семинару 10

Задача 1. Найдите общий вид проективного преобразования вещественной проективной плоскости, отображающего окружность $\omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ в гиперболу $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$, а точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ окружности ω в несобственные точки гиперболы C , лежащие на асимптотах $\{x - y = 0\}$ и $\{x + y = 0\}$ соответственно. (Уравнения указаны в аффинной карте $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$.)

Задача 2. а) Найдите полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно вещественной аффинной коники $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$.

б) Найдите центр аффинной коники $2x^2 + 8xy + 5y^2 - 12y - 2 = 0$.

Задача 3. Найдите такую рациональную параметризацию окружности с уравнением

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра t числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны.

Дополнительные задачи к семинару 10

Задача 1. Найдите общий вид проективного преобразования вещественной проективной плоскости, отображающего окружность $\omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ в гиперболу $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$, а точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ окружности ω в несобственные точки гиперболы C , лежащие на асимптотах $\{x - y = 0\}$ и $\{x + y = 0\}$ соответственно. (Уравнения указаны в аффинной карте $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$.)

Задача 2. а) Найдите полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно вещественной аффинной коники $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$.

б) Найдите центр аффинной коники $2x^2 + 8xy + 5y^2 - 12y - 2 = 0$.

Задача 3. Найдите такую рациональную параметризацию окружности с уравнением

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра t числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны.