Материалы к семинарам по матанализу (второй семестр)

9-я и 10-я недели (05.03–16.03.2018)

Лекции 12–14

1. Лекции 12. Формула Тейлора
2. Лекции 13. Дифференциал отображения
3. Лекции 14. Полнота C. Принцип сжимающих отображений

Примерные задачи семинаров 13–15

Из прошлого списка

Задача 5.1. Докажите, что любая рациональная функция одного вещественного или комплексного переменного в любой точке имеет предел, конечный или бесконечный.

Задача 5.2. Покажите на примере (отличном от $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$), что для двух переменных это уже не так.

Экстремумы

Задача 5.3. Пусть f — функция одной переменной, а g — двух. Найдите частные производные композиции $F = f \circ g$.

Задача 5.4. Докажите, что невырожденные критические точки дважды гладкой функции изолированы.

Задача 5.5. Найдите невырожденные критические точки, определите их тип и нарисуйте линии или поверхности уровня вблизи критических точек для функций:
a) $\sin(x^2 \pm y^2)$; b) $\cos(x^2 \pm y^2 + 2x)$; c) $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$;
d) $\exp(x^2 - y)(5 - 2x + y)$; e) $xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$, $a > 0$.

Формула Тейлора и старшие производные

Задача 5.6. Разложите в ряд Тейлора функции:
a) $\sin(x) + \cos(y)$; b) $\sin(x)\cos(y)$; c) $\sin(xy)$; d) $\exp(x + y)$.

Задача 5.7. Найдите все частные производные порядка 2018 функции $\exp(x^2 + y^2)$ в точке $(0, 0)$.

Задача 5.8. Вычислите производную $D^{20,18}f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ для функции:
a) $f(x, y) = \exp(x^7 + y^7)$; b) $f(x, y) = \exp(x^{20} + y^{18})$; c) $f(x, y) = \sin(x + y)$.

Дифференциал отображения

Задача 5.9. Вычислите дифференциалы и якобианы в точке $x = (x_1, x_2)$ для следующих отображений:
a) $x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $x \mapsto (x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2)$; c) $x \mapsto x + a(\sin(x_1 + x_2), \sin(x_1 - x_2))$.

Задача 5.10. Рассмотрим пространство $M \cong \mathbb{R}^{n^2}$, состоящее из квадратных матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами. Вычислите дифференциал отображения $M \to M$, переводящего матрицу $m \in M$ в m^2 a) в единичной матрице; b) в произвольной точке.

Задача 5.11.* Найдите дифференциал функции, переводящей матрицу её детерминант
a) в единичной матрице; b) в произвольной точке.

Метрические пространства; полнота

Задача 5.12. а)Докажите, что

$$\rho(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{1}$$

является метрикой в пространстве $C_{[0,1]}$.
b) Полно ли пространство $C_{[0,1]}$ в метрике (1)?

Задача 5.13. Полно ли пространство многочленов второй степени в метрике
a) $\rho(f,g) = \max_{1,2} |f - g|$? b) $\rho(f,g) = \max_{1,2,3} |f - g|$?

Задача 5.14. Является ли метрикой расстояние

$$\rho(f,g) = \max_A |f - g|, \quad A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

a) на множестве всех многочленов? b) на множестве всех непрерывных функций?
c) Тот же вопрос, если A заменить рациональные числа отрезка $[0,1]$.

Задача 5.15. Полно ли пространство многочленов на $[0,1]$ в метрике (1)?

Задача 5.16. Докажите, что множество C непрерывных функций на $[0,1]$ не полно в метрике (1).