Лекция 12-18. Формула Тейлора и ее приложения

1 Мультииндексные обзначения.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$$
$$|x|^2 = (x, x)$$
$$|k| = k_1 + \dots + k_n$$
$$x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{n}$$
$$D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$$
$$k! = k_1! \dots k_n!$$

Пример 1 $\sum_{|k| \le N} a_k x^k$*–многочлен степени* $\le N$ *от* n *переменных.*
$D^k f,\ |k| = N$*–частная производная от* f *порядка* N*:*

$$D^k f = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} f.$$

2 Формула Тейлора.

Задача* 1 *Найти наилучшее возможное приближение функции* f *вблизи фиксированной точки* x *многочленом* n*-й степени* $T(h) = T_{f,N,x}(h)$*:*

$$f(x+h) - T(h) = R(h), \tag{1}$$
eqn:tey

остаток R *мал. Требование малости:*

$$D^k R = 0 \text{ при } |k| \le N. \tag{2}$$
eqn:tey1

Важное замечание 1

$$D^m x^k|_{x=0} = \delta_{mk} k!$$

Следствие 1

$$(1), (2) \Rightarrow T = \sum a_k x^k,\ a_k \cdot k! = D^k f(x).$$

Формула Тейлора.

$$f(x+h) = \sum_{|k| \le N} \frac{f^k(x)}{k!} h^k + R(h),$$

причем выполнено (2).

3 Оценка остатка.

thm:tey **Теорема 1** *Формула* (2) *влечет:*

$$|R(h)| = o(|h|^N).$$

4 Второй дифференциал.

Локальное поведение функции в окрестности критической точки часто описывается ее вторым дифференциалом (гессианом) в этой точке. Это–удвоенный однородный многочлен второй степени на касательном пространстве в критической точке, который совпадает с тейлоровским многочленом степени 2 минус свободный член в этой точке. Тем самым, гессиан–квадратичная форма. Критическая точка функции называется невырожденной, если соответствующий гессиан невырожден, то есть не имеет нулевых собственных значений.

Пример 2 *Гессиан функции* x^2+y^2 *в нуле (а также в любой точке) равен* $2(x^2+y^2)$.

5 Достаточное условие наличия экстремума.

Напомним, что точки, где дифференциал функции равен нулю, называются критическими точками этой функции. Значения функции в критических точках называются критическими значениями этой функции. Локальный экстремум C^1-гладкой функции (определенной, по умолчанию, в открытой области) принимается только в ее критической точке.

thm:exts **Теорема 2** *Пусть* C^2*–гладкая функция в открытой области имеет критическую точку, в которой гессиан – положительно (отрицателно) определенная квадратичная форма. Тогда в этой точке функция имеет локальный минимум (максимум).*

Невырожденные критические точки, в которых гессиан не знакоопределен, называются седлами.

Замечание 1 *Неплоская критическая точка бесконечно гладкой функции одной переменной может быть либо экстремумом, либо точкой перегиба. Аналогичной альтернативы для функций многих переменных: либо экстремум, либо седло - нет. Разнообразие критических точек уже для функций двух переменных бесконечно.*

Задача 1 *Нарисуйте линии уровня функции* Rez^3.

6 Лемма Морса.

Лемма 1 (Морса) *Достаточно гладкая функция с невырожденным гессианом в критической точке дважды гладкой заменой координат в окрестности этой точки превращается в ее гессиан плюс свободный член.*

Соответствующая критическая точка называется невырожденной.

Лемма Морса будет доказана в 4м модуле для аналитических функций.

7 Поверхности уровня.

Следствие 2 *Поверхности уровня достаточно гладкой функции в окрестности невырожденной критической точки в* $\mathbb{R}^3$*–эллипсоиды, гиперболоиды, конусы (в подходящей системе координат).*

При переходе через критическое значение функции топология ее поверхности уровня может измениться: неодносвязный однополостный гиперболоид превращается в односвязный двуполостный и наоборот.

На этом основана теория Морса.