Лекция 13-18. Дифференциал отображения

1 Определение дифференциала

Дифференциал отображения–это главная линейная часть приращения. Формальное определение таково:

Определение 1 *Дифференциал в точке x отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$–это линейный оператор*

$$df(x) = A : T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^m$$

такой, что

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ при } h \to 0.$$

2 Якобиева матрица и якобиан

Если в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ выбраны базисы $e_1, \ldots, e_n$ то возникают соответствующие базисы и координаты во всех касательных пространствах, а также координаты $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. В этих координатах

$$f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \tag{1}$$

$$df(x) = (a_{ij}); \ a_{ij} = D_j f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x). \tag{2}$$

Определение 2 *Матрица* (2) *называется матрицей Якоби, а ее определитель (определенный, когда $m = n$)–якобианом. Обозначения:*

$$\det df(x) = J(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

В общем случае матрица Якоби отображения (1) *имеет m строк и n столбцов.*

Теорема 1 *Пусть в пространствах $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ выбраны координаты, и отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задается непрерывно дифференцируемыми функциями* (1). *Тогда дифференциал отображения f существует, и в координатах $dx = dx_1, ..., dx_n; dy_1, ..., dy_m$ задается якобиевой матрицей* (2).

3 Дифференциал голоморфной функции

Касательное пространство к комплексной прямой является комплексно линейным (в нем определено умножение на комплексное число) и одномерным (базис состоит из одного вектора). Оно же является вещественно двумерным.

Задача 1 *Запишите в вещественном базисе на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *оператор умножения на* $a + bi$.

Ответ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Дифференциал голоморфного отображения $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в точке z равен $f'(z)$.

Следствие 1 (Уравнения Коши – Римана) *Если голоморфное отображение* f *имеет вид* $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, *то* $D_x u = D_y v,\ D_y u = -D_x v$.

4 Критические точки

Определение 3 *Точка называется критической для отображения* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *если в ней якобиан равен нулю.*

Определение 4 *Рангом отображения* f *в точке* x *называется ранг дифференциала* $df(x)$.

Пример 1 *Найти дифференциалы и критические точки отображений:*

1.$f = id$ 2.$f = Ax$ 3.$f(x, y)(x, y^2)$

Определение 5 *Диффеоморфизмом называется биективное отображение, дифференцируемое (класса* $\mathbb{C}^1$*) вместе с обратным.*

5 Норма линейного оператора

Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$–евклидовы пространства, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$–линейный оператор.

Определение 6 *Норма* A *определяется равенством:*

$$||A|| = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

Теорема 2 *Норма линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве всегда существует.*

6 Теорема о конечном приращении

Теорема 3 *Пусть* $f - \mathbb{C}^1$*–отображение выпуклой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^m$. *Тогда* $\forall x, y \in \Omega$,

$$|f(y) - f(x)| \leq \max_{[x,y]} ||df|| \cdot |y - x|.$$

Следствие 1 *Дифференцируемое отображение непрерывно.*

7 Теорема о дифференцировании сложной функции

Теорема 4

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x).$$