Накрытия и теория Галуа (весна 2018)

Листок 2

Сдача до 04.04.2018

Задача 2.1. Пусть $M_1 \to M_2 \to M_3$ — последовательность накрытий, причем $[M_1 : M_3]$ — накрытие Галуа. Рассмотрим естественную проекцию

$$M_1 \times_{M_3} M_1 \xrightarrow{\Psi} M_2 \times_{M_3} M_2.$$

Пусть $g \in \mathrm{Gal}([M_1 : M_3])$, а $e_g \subset M_1 \times_{M_3} M_1$ – компонента связности $\{(m, g(m))\}$ в $M_1 \times_{M_3} M_1$. Докажите, что $g \in \mathrm{Gal}([M_1 : M_2]) \subset \mathrm{Gal}([M_1 : M_3])$ тогда и только тогда, когда при проекции в $M_2 \times_{M_3} M_2$ компонента e_g переходит в диагональную компоненту.

Задача 2.2. Пусть $M_1 \to M_2 \to M_3$ — последовательность накрытий Галуа. Докажите, что естественная проекция

$$M_1 \times_{M_3} M_1 \xrightarrow{\Psi} M_2 \times_{M_3} M_2$$

задает сюръективный гомоморфизм $\mathrm{Gal}([M_1 : M_3]) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Gal}([M_2 : M_3])$. Докажите, что $\ker \psi = \mathrm{Gal}([M_1 : M_2])$.

Указание 1. Воспользуйтесь тем, что группа Галуа $\mathrm{Gal}([M_i : M_3])$ отождествляется с множеством связных компонент $M_i \times_{M_3} M_i$, и примените предыдущую задачу.

Задача 2.3. Пусть M линейно связно, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие, а $x \in M$ — любая точка. Докажите, что мощность множества $\pi^{-1}(x)$ не больше, чем мощность $\pi_1(M)$.

Определение 2.1. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — набор отображений на M, проиндексированный набором индексов I (возможно, бесконечным, или даже несчетным). Рассмотрим множество всех таких $(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_1}, \dots) \in \prod M_\alpha$, что $\pi_\alpha(m_\alpha) = m$ для какого-то $m \in M$. Это множество называется **расслоенным произведением** $\{M_\alpha\}$ и обозначается $\prod_M M_\alpha$.

Задача 2.4. Пусть M — топологическое пространство, а $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — набор его накрытий. Введем на $\prod_M M_\alpha$ топологию следующим образом. Пусть $U \subset M$ открыто, а $\{U_\alpha \subset M_\alpha\}$ – набор открытых множеств, накрывающих U. Докажите, что множества вида $\prod_U U_\alpha \subset \prod_M M_\alpha$ задают базу топологии на $\prod_M M_\alpha$. Докажите, что $\prod_M M_\alpha$ хаусдорфово

- а)* Верно ли, что естественная проекция $\prod_M M_\alpha \to M$ — накрытие?
- б) Предположим, что у каждой точки M найдется односвязная окрестность. Докажите, что естественная проекция $\prod_M M_\alpha \to M$ — накрытие.

Определение 2.2. В такой ситуации $\prod_M M_\alpha$ называется **расслоенным произведением M_α над** M, либо просто произведением накрытий $M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M$.

Задача 2.5. Пусть все накрытия $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ расщепляются. Докажите, что $\prod_M M_\alpha$ тоже расщепляется.

Задача 2.6. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – накрытия Галуа. Докажите, что любая компонента связности их произведения над M — тоже накрытие Галуа.

Задача 2.7. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – множество всех накрытий $S^1 \to S^1$, $t \to nt$, проиндексированных $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любая связная компонента $\prod_M M_\alpha$ изоморфна $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Задача 2.8. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие, а $x \in M$. Рассмотрим произведение $\prod_{M, \{\pi^{-1}(x)\}} \tilde{M}$ $\tilde{M}$ с собой, проиндексированное множеством $\pi^{-1}(x)$, и пусть $\tilde{M}_G$ — связная компонента в $\prod_{M, \{\pi^{-1}(x)\}} \tilde{M}$, содержащая произведение всех $x_\alpha \in \{\pi^{-1}(x)\}$. Докажите, что $\tilde{M}_G \times_M \tilde{M}$ расщепляется над $\tilde{M}_G$. Докажите, что $\tilde{M}_G \to M$ — накрытие Галуа.

Задача 2.9 (*). Пусть B — множество полиномов $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \dots + a_0$ над $\mathbb{C}$, у которых все корни разные, а B_1 — множество всех наборов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ попарно различных чисел $x_i \in \mathbb{C}$. Введем на B и B_1 естественную топологию подмножества в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение $B_1 \xrightarrow{\pi} B$, $(x_1, \dots, x_n) \to \prod(t - x_i)$. Докажите, что π — накрытие Галуа. Найдите его группу Галуа.