21 задача контрольной работы.

1. Доказать, что всякая прямая на поверхности является геодезической.

2. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими кривыми.

3. Привести пример поверхности, через любые две точки которой проходит бесконечно много геодезических.

4. *Катеноид* образован вращением цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ вокруг оси X. Найти гауссову кривизну катеноида.

5. Дифференциальное уравнение движения точечного электрического заряда в поле магнитного полюса имеет вид
$$r''(t) = c \mid r(t) \mid^{-3} (r(t) \times r(t)),\ c = const.$$
Доказать, что точка движется по геодезической на круглом конусе.

6. На плоскости задана метрика $ds^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2)$. Доказать, что гауссову кривизну можно вычислить по формуле $K = -\frac{1}{2f} \triangle \ln f$, где $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ — оператор Лапласа.

7. Поверхности с равной постоянной гауссовой кривизной локально изометричны. Доказать.

8. Лемма о симметрии, которой я точно пользовался.

   Пусть M — гладкое многообразие с симметрической связностью ∇ и $\gamma(t, v) \colon [0, l] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ — гладкое отображение (про такие говорят, что задана *параметризованная поверхность* на M). Доказать, что $\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}} \frac{\partial\gamma}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial v}} \frac{\partial\gamma}{\partial t}$ (в обозначениях лекции $\nabla_T V = \nabla_V T$).

9. Пусть $\gamma(t, v) \colon [0, l] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ такая параметризованная поверхность, что для любого $t_0 \in [0, l]$ кривая $v \to \gamma(t_0, v),\ v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, есть натурально параметризованная геодезическая, ортогональная кривой $\gamma(t, 0)$ в точке $\gamma(t_0, 0)$. Доказать, что для любой точки (t_0, v_0) кривая $\gamma(t_0, v)$ ортогональна кривой $\gamma(t, v_0)$.

10. Пусть M — риманова поверхность, $p \in M,\ V \subset T_pM$ — окрестность начала координат, в которой экспоненциальное отображение $Exp_p \colon T_pM \to M$ является диффеоморфизмом, $S_r(0) \subset V$ — шар радиуса r с центром в т.$0 \in T_pM$, L_r — длина $Exp(S_r(0))$ в M. Доказать, что $K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L_r}{r^3}$.

    Указание: можно использовать полярную систему координат.

11. Определим вложение тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1,\ (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, в сферу единичного радиуса $S^3 \subset E^4$:
$$(\theta, \varphi) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi).$$
Показать, что вложенный таким образом тор имеет нулевую гауссову кривизну в индуцированной метрике.

12. Пусть M^n — гиперповерхность в E^{n+1}, с единичным полем нормалей n. Пусть $m \in M,\ v \in T_mM,\ \gamma \colon [a, b] \to M,\ \gamma(a) = m,\ \dot\gamma(a) = v$. Доказать, что $(\ddot\gamma(a), n) = (L_p(v), v)$, где L_p — оператор формы.

13. Пусть $\gamma \colon [a, b] \to E^3$ — гладкая кривая с единичной скоростью в E^3. Предположим, что $\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t) \neq 0$ (векторное произведение $\neq 0$) для всех $t \in [a, b]$. Рассмотрим векторные поля $T = \dot\gamma(t),\ N = \frac{\ddot\gamma}{||\ddot\gamma||}$ и $B = T \times N$. Докажите, что

    а) T, N, B — ортонормальный базис при любом $t \in [a, b]$.

    б) $\dot T = \varkappa N$,
    $\dot N = -\varkappa T + \tau B$ (формулы Френе),
    $\dot B = -\tau N$ для некоторых гладких функций $\varkappa, \tau \colon [a, b] \to \mathbb{R}$.
    ($\varkappa$ и τ называются *кривизной* и *кручением* кривой γ).

14. Напишите и докажите формулы Френе для плоской кривой.

15. Докажите, что кривизна из формул Френе для плоской кривой совпадает с кривизной, которая определяется с помощью оператора формы.

16. Тютик Задунайский утверждает, что $\nabla_Y[X,Y] = [\nabla_Y X, Z] + [X, \nabla_Y Z]$ для трех векторных полей X, Y, Z на многообразии. Я сомневаюсь. Рассудите нас.

17. Пусть ω — некоторая $1-$форма на многообразии M. Докажите, что для любых X и $Y \in VectM$ имеем
$$2(d\omega)(X,Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) - \omega([X,Y]),$$
где L_X — производная Ли, d — внешнее дифференцирование.

18. Вычислить геодезическую кривизну орицикла на плоскости Лобачевского (кривизна которой $K = -1$).

19. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ гиперболические координаты (r, θ, φ):
$$x = r\cos\theta\,\mathrm{sh}\,\varphi,\ y = r\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\varphi,\ z = r\,\mathrm{ch}\,\varphi.$$
   а) Нарисуйте поверхность $r = 1$.
   б) Найдите все точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, в окрестности которых (r, θ, φ) служат координатами.
   в) Найдите в локальных координатах (θ, φ) метрику на поверхности M: $r = 1$, индуцированную стандартной метрикой в E^3.
   г) Выразите координатные векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ через $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.
   д) Вычислите символы Кристоффеля связности Леви–Чивита на M.

20. Докажите, что гауссова кривизна поверхности
$ax^2 + by^2 - z = 0$ равна $K = \frac{4ab}{(4a^2x^2+4b^2y^2+1)^2}$.

21. Пусть (t, v) — семейство геодезических, зависящее от параметра v. Предположим, что $||\dot{\gamma}_t(t, v)||$ равно константе, которая не завист от v.

    Доказать, что в таком случае и $||\dot{\gamma}_v(t, v)||$ равно константе, не зависящей от t (связность Леви–Чивита).