# Лекция 14-18. Напоминание из курса топологии: метрические пространства, компактность, полнота

## 1 Определения и примеры метрических пространств

def:metr **Определение 1** *Метрикой на множестве $X$ называется отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

- *рефлексивность: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;*
- *симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;*
- *неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.*

  *Метрическим пространством называется множество с определенной на нем метрикой.*

На множестве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим метрику равенством:

$$\rho(f, g) = \max_{[a,b]}[f - g] \tag{1}$$ eqn:c

prop:exc **Предложение 1** *Метрика* (1) *удовлетворяет определению 1.*

## 2 Нормированные пространства

**Определение 2** *Нормой на линейном пространстве $L$ назывется функция $n : L \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

- *положительность: $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
- *полулинейность: $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$*
- *неравенство треугольника: $n(x + y) \leq n(x) + n(y)$.*

Обозначение: $n(x) = |x|$ (норма - аналог длины).

**Предложение 2** *Всякое линейное нормированное пространство является метрическим с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$.*

## 3 Примеры

Пространство $l_2$ - это пространство последовательностей

$$l_2 = \{x \in \mathbb{R}^\infty | x = (x_j) = x_1, ..., x_j, ... \ \sum x_j^2 < \infty\}$$

с нормой

$$|x|^2 = \sum x_j^2.$$

Пространство $l_\infty$ - это пространство ограниченных последовательностей

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{R}^\infty | x = (x_j) = x_1, ..., x_j, ... \ \sup |x_j| < \infty\}$$

с нормой

$$|x| = \sup |x_j|.$$

Докажите, что $l_2$ и $l_\infty$ – нормированные пространства.

## 4 Полнота.

def:cochy **Определение 3** *Последовательность $(x_n)$ фундаментальна (Коши), если $\forall \varepsilon \exists N$ : $\forall k, l > N,\ \rho(x_k, x_l) < \varepsilon$.*

**Предложение 3** *Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве фундаментальна.*

Упражнение: докажите!

def:comp **Определение 4** *Метрическое пространство полно, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.*

Докажите, что $l_2$ и $l_\infty$ – полные пространства.

thm:eucl **Теорема 1** *Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ полно для любого $n$.*

thm:closed1 **Теорема 2** *Замкнутое подмножество полного метрического пространства с индуцированной метрикой полно.*

rem:sub **Замечание 1** *Именно такие полные пространства чаще всего используются в доказательстве разнообразных теорем существования.*

# 5 Теорема о пополнении.

thm:compl

**Теорема 3** *Для каждого метрического пространства существует его пополнение. Это значит, что для каждого метрического пространства $X$ с метрикой $d$ существует пространство $\tilde{X}$ с метрикой $\tilde{d}$ и вложение $i : X \to \tilde{X}$ такие, что*

*a) $\tilde{X}$ полно*

*b) $\tilde{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$*

*c) $\tilde{X}$ совпадает с замыканием $X$ (говорят, что $X$ плотно в $\tilde{X}$).*

*Любые два пополнения одного и того же пространства изометричны.*

**Пример 1** *Вещественная ось - пополнение пространства рациональных чисел с метрикой $d(x, y) = |x - y|$.*

# 6 Словарь: построение вещественных чисел - теорема о пополнении

- Рациональные числа – метрическое пространство $X$.
- Вещественные числа (классы эквивалентных фудаментальных последовательностей в $Q$) – точки пополнения $\tilde{X}$ пространства $X$ (классы эквивалентных фудаментальных последовательностей в $X$).
- Плотность $X$ в $\tilde{X}$ – плотность $Q$ в $\mathbb{R}$.
- Критерий Коши – полнота $\tilde{X}$.

# 7 Определение компактности

def:comp

**Определение 5** *Подмножество метрического пространства компактно, если в нем из любой последовательности можно извлечь подпоследовательность, которая сходится к элементу этого множества. Компактное множество часто называют компактом.*

**Замечание 2** *Компактность в $\mathbb{R}^n$ равносильна замкнутости и ограниченности, а в произвольном метрическом пространстве - нет.*

**Теорема 4** *Непрерывная функция на компакте достигает своего максимума и минимума.*

Доказательство почти такое же, как в одномерном случае.