Листок 1.7

Непрерывность и дифференцируемость функций многих переменных

срок сдачи 23 марта

Задача 1. Докажите, что если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Задача 2. (Обобщенный признак Лейбница) Пусть $\zeta \neq 1$ — корень из единицы, (a_n) — произвольная убывающая последовательность, стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд $\sum_n \zeta^n a_n$ сходится.

Задача 3. Докажите, что на $\mathbb{R}$ существует бесконечно гладкая функция, которая в окрестности нуля тождественно равна 1, а вне другой окрестности нуля тождественно равна нулю.

Задача 4. Приведите пример функции на плоскости, непрерывной вдоль всякой прямой, но разрывной по совокупности переменных.

Задача 5. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по x и равномерно по x непрерывна по y, т. е. $\sup_x |f(x, y) - f(x, y_0)| \to 0$ при $y \to y_0$. Докажите, что функция f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 6. Постройте разрывную рациональную функцию, имеющую всюду частные производные.

Задача 7. Докажите, что функция, имеющая всюду ограниченные частные производные, непрерывна.

Задача 8. Приведите пример функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ производные по всякому направлению, но не дифференцируемой в $(0, 0)$.

Задача 9. Приведите пример такой функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ производные $\partial_h f$ вдоль всякого вектора h, что отображение $h \mapsto \partial_h f$ не является линейным.

Задача 10.* а) Постройте опровергающий пример к задаче 2.4b) книги М. Спивака «Математический анализ на многообразиях»:
Пусть g — непрерывная нечетная функция на единичной окружности. Определим функцию на плоскости как линейную интерполяцию функции g на каждой прямой, проходящей через 0:

$$f(x) = \begin{cases} |x| g\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Показать, что f не дифференцируема в нуле, кроме случая $g \equiv 0$.
б) Дайте правильную формулировку и докажите её.

Задача 11. Пусть M_n — пространство вещественных матриц размера $n \times n$. Найдите дифференциалы следующих отображений из некоторой области в M_n в M_n: а) $X \mapsto X^2$, б) $X \mapsto X^{-1}$.