

Семинар 11.

Проективные, аффинные и евклидовы квадрики и коники

Задача 1. Определите канонический вид и каноническую систему координат для вещественной аффинной коники с уравнением

а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$.

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

В обоих случаях укажите аффинный тип коник. Если коника центральна, то укажите координаты ее центра.

Определение проективной квадрики в $\mathbb{P}^3$ в точности повторяет определение проективной коники в $\mathbb{P}^2$: *проективная квадратика* Q в $\mathbb{P}^3$ есть множество нулей квадратичной формы $F(x)$ от однородных координат $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ точки x в $\mathbb{P}^3$. Проективная квадратика называется *невырожденной*, если квадратичная форма F невырождена, т. е. имеет максимальный ранг 4. Над полем $\mathbb{C}$ тип проективной квадрики (как и проективной коники) однозначно определяется ее рангом.

Задача 2. Докажите, что на невырожденной комплексной квадратике $Q = \{F(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^3 = P(V)$ имеется два семейства проективных прямых. Объясните, что каждая проективная прямая на Q имеет вид $P(U)$, где $U \subset V$ - изотропное пространство формы F .

Определение аффинной квадрики в $\mathbb{A}^3$ также аналогично определению аффинной коники в $\mathbb{A}^2$: *аффинная квадратика* в $\mathbb{A}^3$ есть множество нулей квадратичной функции $f(y)$:

$$f(y) := F(y) + L(y) + C = 0, \quad (1)$$

здесь $F(y)$ и $L(y)$ - квадратичная и линейная формы от аффинных координат (y_1, y_2, y_3) , а C - константа, $C \in \mathbf{k}$. По аналогии с проективным замыканием коники определяется *проективное замыкание* $\overline{Q}$ аффинной квадрики (переходом от аффинных координат к проективным). Аффинная квадратика Q называется *невырожденной*, если ее проективное замыкание $\overline{Q}$ - невырожденная квадратика в $\mathbb{P}^3$. Непустая аффинная квадратика называется *центральной*, если она имеет (хотя бы один) центр симметрии.

Задача 3. Найдите все типы невырожденных аффинных квадрик:

а) над $\mathbb{C}$;

б) над $\mathbb{R}$.

Задача 4. а) Пусть Q - непустая невырожденная аффинная квадратика. Покажите, что Q центральна (притом имеет единственный центр) тогда и только тогда, когда соответствующая квадратичная форма F из уравнения (1) квадрики Q имеет максимальный ранг 3.

б) Найдите центр невырожденной вещественной аффинной квадрики с уравнением $2y_1^2 + 4y_1y_2 + 3y_2^2 + y_3^2 - 4y_1 - 4y_2 + 6y_3 + 10 = 0$.

Евклидовой квадратикой (соответственно, *евклидовой коникой*) называется квадратика в евклидовом аффинном пространстве E^3 (соответственно, коника в евклидовой аффинной плоскости E^2). *Приведением к главным осям* уравнения невырожденной центральной евклидовой квадрики (соответственно, коники) называется приведение этого уравнения к каноническому виду посредством движения в E^3 (соответственно, в E^2).

Задача 5. Проверьте, что евклидова квадратика Q с уравнением

$$4y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_2y_3 - 3y_3^2 - 2y_1 + 6y_3 + 2 = 0$$

невырождена и центральна, и движением приведите ее уравнение к главным осям. Найдите формулы этого движения и координаты центра квадрики Q .

Дополнительные задачи к семинару 11

Задача 1. Дана невырожденная центральная евклидова квадрика Q с уравнением (1), где

$$F(y) = Y^t G Y, \quad L(y) = bY, \quad C \in \mathbb{R},$$

где $Y = (y_1, y_2, y_3)^t$ - столбец координат точки y , вычисляемых относительно фиксированного ортонормированного аффинного репера (O, e_1, e_2, e_3) в E^3 , $G = (\tilde{F}(e_i, e_j))$ - матрица Грама квадратичной формы F (а $\tilde{F}$ - поляризация F), $b = (b_1, b_2, b_3)$ - строка коэффициентов линейной формы L . Найдите общую формулы движения, приводящего уравнение Q к главным осям, и формулу для координат центра квадрики Q .