Гладкие многообразия

С.М.Натанзон

Contents

1. Категория гладких многообразий

1.1. **Гладкие многообразия.** Анализ, который вы изучали на 1 курсе, позволяет исследовать гладкие преобразований подмножеств множества $\mathbb{R}^n$. В реальной жизни, однако, интересующие нас множества не имеют естественной структуры подмножества множества $\mathbb{R}^n$. Для их исследования эту структуру приходится вводить дополнительно Более того, эту дополнительную структуру можно вводить по разному.

Например, для описания и исследования московской области ее удобно покрыть мысленной сеткой параллелей и меридианов расстояния между которыми мерятся в километрах. Но можно, конечно, как это делалось раньше, покрыть область сеткой, где расстояние мериться в верстах. Можно вообще, если это покажется удобным, повернуть сетку на какой-то угол. Для согласования различных систем координат нужно использовать функции перехода, пересчитывающие одну систем координат в другую.

Такой подход, это особенно важно, годится и для множеств, которые по топологическим причинам не является подмножеством $\mathbb{R}^n$. Например для исследования всего земного шара или областей гомеоморфных тору и т.п. В этом случае мы поступаем так, как это делается в картографии. То есть, мы произвольным образом покрываем множество областями (картами) гомеоморфными $\mathbb{R}^n$, вводим на этих областях системы координат и указываем отображения перехода между системами координат для подмножеств, попадающих в несколько карт. Для того, чтобы функции гладкие в одной системе координат оставались гладкими и в другой системе координат надо, чтобы отображения перехода были гладкими.

Дадим теперь формальное определение

Рассмотрим хаусдорфово сепарабельное топологическое пространство M_0. *Картой размерности n* на M_0 называется пара (U, φ), где $U \subset M_0$ — открытое подмножество M_0 и $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм на открытое подмножество $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Семейство карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ называется *атласом*, если $\bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} U_\alpha = M_0$. Размерности всех карт атласа связного многообразия совпадают. Эту размерность мы будем называть размерностью многообразия. Далее, если не оговорено противное, мы будем считать, что размерности всех компонент связности многообразия совпадают.

Карты $\{(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}\}$ и $\{(U_{\alpha_2}, \varphi_{\alpha_2}\}$ называются *пересекающимися*, если $U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Пересекающимся картам отвечают непустые множества $V_1 = \varphi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2})$, $V_2 = \varphi_{\alpha_2}(U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2})$ и гомеоморфизм $\varphi_{1,2} = \varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}^{-1} : V_1 \to V_2$. Отображения $\varphi_{1,2}$ называются *отображениями перехода.* Атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ называется *гладким*, если все отображения перехода являются гладкими, то есть бесконечно дифференцируемыми функциями.

Карту (U, φ) назовем *согласованной с гладким атласом* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ если все отображения перехода между картами (U, φ) и $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ являются гладкими.

Гладкие атласы $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ и $\{(U_\beta, \varphi_\beta) | \beta \in \Upsilon\}$ считаются *эквивалентными*, если их объединение $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) | \alpha \in \Sigma, \beta \in \Upsilon\}$ также является гладким атласом.

Задача 1.1. *Докажите, что гладкие атласы* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ *и* $\{(U_\beta, \varphi_\beta) | \beta \in \Upsilon\}$ *эквивалентны, если и только если все карты* (U_β, φ_β) *согласованы с а атласом* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$.

Класс эквивалентности гладких атласов называется *гладкой структурой.* Многообразие с гладкой структурой называется *гладким многообразием.* Приведем несколько простейших примеров гладких многообразий.

Пример 1.1. *Векторное пространство* $\mathbb{R}^n$ *обладает естественной картой, превращающей ее в гладкое многообразие. Эта гладкая структура на* $\mathbb{R}^n$ *называется стандартной.*

Пример 1.2. *Рассмотрим гладкую функцию* $f : X \to \mathbb{R}$ *на области* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Её график* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1} | x \in X\}$ *обладает естественной картой* $\varphi : \Gamma_f \to X$*, где* $\varphi(x, f(x)) = x$*. Эта карта превращает* Γ_f *в гладкое многообразие.*

Задача-пример 1.1. *Сфера* $S^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum\limits_{j=1}^{n+1} (x^j)^2 = 1\}$ *обладает атласом карт* (U_i^+, φ_i^+)*,* (U_i^-, φ_i^-)*, где* $i = 1, \ldots, n+1$*. Эти карты состоят из областей* $U_i^+ = \{x \in S^n | x_i > 0\}$*,* $U_i^- = \{x \in S^n | x_i < 0\}$ *и отображений* $\varphi_i^\pm(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$*. Докажите, что этот атлас гладкий* .

Задача-пример 1.2. *Зададим структуру гладкого многообразия на проективной плоскости* $\mathbb{R}P^2$*. Будем представлять ее как множество прямых в* $\mathbb{R}^3$*. Каждая из прямых задаётся вектором с координатами* (x, y, z)*, причем пропорциональные вектора задают одну и ту же прямую. Рассмотрим на* $\mathbb{R}P^2$ *атлас из 3 карт* (U_1, φ_1)*,* (U_2, φ_2)*,* (U_3, φ_3)*, где* $U_1 = \{(x, y, z) | x \neq 0\}$*,* $U_2 = \{(x, y, z) | y \neq 0\}$*,* $U_3 = \{(x, y, z) | z \neq 0\}$*,* $\varphi_1(x, y, z) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$*,* $\varphi_2(x, y, z) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$*,* $\varphi_3(x, y, z) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$*. Докажите, что этот атлас гладкий. Постройте гладкий атлас для* $\mathbb{R}P^n$*.*

1.2. **Морфизмы и изоморфизмы.** Рассмотрим, какие дополнительные свойства приобретает топологическое многообразие M_0, если зафиксировать на нем гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$. В этом случае гомеоморфизм $\varphi_\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ позволяет отождествить область U_α с областью в $\mathbb{R}^n$ и считать, что функции на U_α — это хорошо известные нам функции от n переменных. Отображения перехода между картами позволяют исследовать глобальные свойства отображения. На пересечении двух карт отображение перехода записывается как замена координат отображения.

Для любой лежащей в U_α окрестности $U \subset U_\alpha$ точки $p \in U \subset U_\alpha$ мы можем, в частности, указать, какие отображения области U в пространство $\mathbb{R}^k$ считаются гладкими. Ввиду гладкости отображений перехода между картами (т.е. гладкость замены координат в $\mathbb{R}^n$), множество гладких отображений на U не зависит от того, подмножеством какой карты U_α считается множество U.

По тем же причинам множество гладких отображений не меняется при замене гладкого атласа на эквивалентный. Таким образом, структура гладкого многообразия позволяет выделить среди всех отображений $M_0 \to \mathbb{R}^k$ класс гладких отображений и с помощью карт исследовать их методами многомерного математического анализа.

Пусть M и N гладкие многообразия. Рассмотрим отображение $F : M_0 \to N_0$ и карты (U, φ), (V, ψ) из гладких атласов многообразий такие, что $F(U) \subset V$.

Отображение F называется гладким на U, если отображение $\psi F \varphi : \varphi^{-1}(U) \to V$ является гладким. Назовем отображение F *гладким в точке* $p \in M$, если оно гладкое на некоторой окрестности p.

Задача 1.2. *Докажите, что гладкость отображения в точке не зависит от выбора карты* (V, ψ) *и не меняется при замене атласа на эквивалентный.*

Отображение, гладкое в каждой точке, назовем *гладким отображением.* Мы будем обозначать их $F : M \to N$. Именно такие отображения и являются *морфизмами в категории гладких многообразий.*

Гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}$ гладкого многообразия M на вещественную прямую со стандартной гладкой структурой называется *гладкой функцией.* Гладкие функции на M образуют алгебру $\mathcal{F}(M)$.

Гомеоморфизм между гладкими многообразиями $F : M \to N$ называется *диффеоморфизмом,* если он и обратный к нему $F^{-1} : N \to M$ являются гладкими. Другими словами, диффеоморфизм – это изоморфизм в категории гладких многообразий. Гладкие многообразия, между которыми существует диффеоморфизм, называются *диффеоморфными.*

Гладкие функции и отображения на диффеоморфных многообразиях обладают одинаковыми свойствами.

Задача 1.3. *Докажите, что диффеоморфизм* $F : M \to N$ *порождает по формуле* $f \mapsto fF$ *изоморфизм* $F^* : \mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M)$ *между алгебрами гладких функций на* N *и* M.

Замечание 1.1. *Гомеоморфные гладкие многообразия не обязательно диффеоморфны, но примеры таких многообразий достаточно сложны.*

1.3. **Задание многообразий уравнениями.** В приложениях гладкие многообразия часто возникают как множества уровня $\{x \in U \subset \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$ гладких функций $f : U \to \mathbb{R}$. Сферу S^n из примера 1.1 можно рассматривать, например, как множество уровня $f(x) = 1$ для $f(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2$. Не все множества уровня образуют, однако, гладкие многообразия.

Пример 1.3. *Множество уровня* $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (f(x_1, x_2) = c\}$ *функции* $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ *является многообразием при* $c \neq 0$, *но не является многообразием при* $c = 0$. *В последнем случае множество уровня является объединением пересекающихся в нуле прямых* $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, *и поэтому не имеет карты, содержащей 0.*

Критерий, когда множество уровня является гладким многообразием следует из термы о неявной функции $f(x) = f(x_0)$, где $x = (x^1, \dots, x^n)$. Она утверждает, что, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) \neq 0,$$

то в малой окрестности U точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ множество уровня $\{x \in U | f(x) = f(x_0)\}$ совпадает с графиком некоторой гладкой функции $h = h(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ на $V \subset \{(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)\} = \mathbb{R}^{n-1}$. То есть

$$\{x \in U | f(x) = f(x_0)\} =$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n | (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \subset V; x^i = h(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

Пример 1.4. *Рассмотрим $f(x, y) = y - x^2$ в окрестности точки $(0, 0)$, где $f(0, 0) = 0$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 \neq 0$. Рассмотрим функцию $h(x) = x^2$. Тогда*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}; y = h(x)\}.$$

Теорема 1.1. *Рассмотрим гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и ее непустое множество уровня $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}$. Предположим, что градиент функции $\mathtt{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ не обращается в 0 на M_c. Тогда M_c — гладкое многообразие размерности $n - 1$.*

Proof. Пусть $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in M_c$. Из условия $\mathtt{grad} f(x_0) \neq 0$ следует, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \neq 0$ для некоторого i. Тогда, согласно теореме о неявной функции, существуют

- окрестность $x_0 \in \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$;
- окрестность $V_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ точки $(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$;
- гладкая функция $h^i = h^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ на V_i

такие, что

$$U_i = M_c \cap \widetilde{U}_i = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \in V_i; \\ x^i = h^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

Положим теперь $\tilde{\varphi}_i(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ и $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i|_{U_i}$. Тогда пара (U_i, φ_i) будет картой в окрестности точки x_0. Отображение перехода $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ имеет вид $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{j-1}, \tilde{x}^{j+1}, \dots, \tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^k = x^k$ при $k \neq i$ и $\tilde{x}^i = h^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ и, следовательно, гладкое. □

В качестве примера используем эту теорему, чтобы определить структуру гладкого многообразия на *специальной линейной группе* $SL(n, \mathbb{R})$, то есть на группе всех квадратных матриц порядка n с определителем 1. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ вложена в множество $M_n(\mathbb{R}) = \{A = \{a_{ij}\} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ всех квадратных матриц $A = \{a_{ij}\}$ порядка n. Множество $M_n(\mathbb{R})$ можно рассматривать как векторное пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами $\{a_{ij}\}$. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ является тогда множеством уровня $f(A)$=1 функции $f(A) = \det A$. Таким образом, мы определим на $SL(n, \mathbb{R})$ структуру гладкого многообразия, если докажем, что $\mathtt{grad} f$ не обращается в 0 на $SL(n, \mathbb{R})$.

Докажем сначала, что $\mathtt{grad} f$ не обращается в 0 на единичной матрице E. Разложив определитель по строке, находим, что

$$f(A) = \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(A) = \det A_{11}$. В частности $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E) = 1$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $A_0 \in SL(n, \mathbb{R})$. Введем на множестве $M_n(\mathbb{R})$ новые координаты, сопоставив матрице $A \in SL(n, \mathbb{R})$ набор чисел $\{b_{ij}\}$, представляющий собой матричные элементы матрицы $B = A_0^{-1} A$. Тогда набору чисел $\{b_{ij}\}$ отвечает матрица $A(\{b_{ij}\}) = A_0 B$.

С другой стороны, $f(A(\{b_{ij}\})) = \det(A_0 B) = \det(A_0) \det(B) = \det(B) = f(B)$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(B) = \frac{\partial f}{\partial b_{11}}(A(\{b_{ij}\})) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}$$

и, в частности,
$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0)\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}.$$
Левая часть равенства, как уже доказано, не равна 0. Следовательно, не равен 0 и градиент $\mathtt{grad} f$ в точке A_0.

Теорема 1.1 обобщается на случай гладких отображений $f = (f^1, \dots, f^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Роль градиента играет в этом случае матрица Якоби
$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2. *Рассмотрим гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где $n > m$, и ее множество уровня $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что ранг матрицы Якоби $\mathtt{rang}(df)$ равен m на M_c. Тогда M_c — гладкое многообразие размерности $n - m$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.1 с использованием теоремы о неявном отображении вместо теоремы о неявной функции.

Локальные карты строятся по следующей схеме. Из условия $\mathtt{rang}(df(x_0)) = m$ следует, что существуют номера $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ такие, что отвечающие им столбцы матрицы $df(x_0)$ линейно независимы. Рассмотрим столбцы, не вошедшие в этот список $I = (i_1, \dots, i_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Тогда в окрестности точки x_0 существует карта вида (U_I, φ_I), где $\varphi_I(x_1 \dots, x_n) = (x_{i_1} \dots, x_{i_{n-m}})$

Задача 1.4. *Доказать теорему 1.2.*

Задача 1.5. *Построить структуру гладкого многообразия на двумерном торе* $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 | (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1; (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$.

2. Касательное пространство

2.1. **Касательные векторы.** Для гладких многообразий $M \subset \mathbb{R}^N$ (например, заданных в $\mathbb{R}^N$ уравнениями) касательное пространство T_p в точке $p \in M$ имеет очевидный геометрический смысл. Это плоскость в $\mathbb{R}^N$ размерности $\dim M$, касающаяся M в точке p.

Пространство T_p состоит из касательных векторов, выходящих из точки p. Касательному вектору отвечает множество касающихся его гладких путей $\gamma : [0,1] \to M \subset \mathbb{R}^N$, выходящих из точки p (т.е. $\gamma(0) = p$). Два пути γ_1 и γ_2, отвечающие одному вектору касаются между собой, то есть
$$\frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0).$$
Или, что тоже самое,
$$(\gamma_1 - \gamma_2)(t) = O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Мы будем называть такие пути γ_1 и γ_2 *эквивалентными.* Таким образом, касательное пространство T_p для гладкого многообразия M вложенного в $\mathbb{R}^N$ можно понимать как совокупность классов эквивалентности гладких путей выходящих из $p \in M$.

Заметим теперь, что это определение легко переносится на произвольное гладкое многообразие M. Гладкое отображение $\gamma : [0,1] \to M$, где $\gamma(0) = p$, мы будем называть гладким путем из точки p. Рассмотрим содержащую p карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Пути γ_1 и γ_2 назовем *эквивалентными*, если пути $\varphi\gamma_1$ и $\varphi\gamma_2 : U \to \mathbb{R}^n$ эквивалентны, то есть

$$(\varphi\gamma_1 - \varphi\gamma_2)(t) = O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Задача 2.1. *Докажите, что эквивалентность путей не меняется при замене карты U на другую карту того же гладкого атласа и при замене гладкого атласа на эквивалентный.*

Класс эквивалентности путей называется *касательным вектором в точке p.* Множество касательных векторов T_p называется *касательным пространством* многообразия M в точке p.

Точку $p \in U$ назовем *центром карты* (U, φ), если $\varphi(p) = 0$

Задача 2.2. *a) Для каждой точки p гладкого многообразия существует карта с центром в p, согласованная с гладким атласом многообразия.*

b)Рассмотрим согласованную с гладким атласом многообразия карту (U, φ) с центром в p. Касательное пространство T_p имеет структуру векторного пространства относительно сложения $\varphi^{-1}(\varphi\gamma_1 + \varphi\gamma_2)$ и умножения на константу $\varphi^{-1}k(\varphi\gamma)$. Эта структура не зависит от выбора карты (U, φ).

Задача 2.3. *Пусть $F : M \to N$ — диффеоморфизм гладких многообразий. Докажите, что соответствие путей $\gamma(t) \to F\gamma(t)$ порождает изоморфизм касательных пространств $F_* : T_p \to T_{F(p)}$.*

Пример 2.1. *Опишем касательное пространство в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ к многообразию $\mathbb{R}^n$. Сопоставим каждому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ путь $\gamma_v(t) = x_0 + tv$. Эти пути не эквивалентны для разных векторов v. С другой стороны, согласно формуле Тейлора, любой путь $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ с началом в x_0 эквивалентен пути $\gamma_v(t)$, где $v(t) = (\frac{\partial x^1(t)}{\partial t}(0), \ldots, \frac{\partial x^n(t)}{\partial t}(0))$. Таким образом, касательное пространство $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ естественно отождествляется с самим $\mathbb{R}^n$. Вектор касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, отвечающий стандартному базисному вектору e_i пространства $\mathbb{R}^n$, обозначается $\frac{\partial}{\partial x^i}(x_0)$. Он отвечает пути $\gamma(t) = (x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x_0^i + t, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)$.*

2.2. **Операторы дифференцирования в точке.** Пусть (U, φ) содержащая точку $p \in M$ карта гладкого многообразия M. Функционал $X = \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ на множестве гладких функций $\mathcal{F}(U)$ называется *дифференцированием в точке* $p \in M$, если он удовлетворяет условиям

$$X(f+g) = X(f) + X(g); \quad X(kf) = kX(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Множество всех дифференцирований в точке p будет обозначаться Diff_p.

Задача 2.4. *1) Докажите, что дифференцирование константы дает нуль.*

2)Докажите, что дифференцирования в точке $Diff_p$ образуют векторное пространство.

3) Пусть $F : U \to V$ — диффеоморфизм карт из атласов двух гладких многообразий. Он порождает порождает изоморфизм $F^* : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ между алгебрами гладких функций по формуле $f \mapsto fF$ (см. задачу 1.3). Докажите, что соответствие функционалов $X \to XF^*$ порождает изоморфизм векторных пространств $Diff_p \to Diff_{F(p)}$.

Наша ближайшая цель доказать, что касательное пространство T_p естественно изоморфно векторному пространству дифференцирований Diff_p.

Построим сначала отображение $\Phi = \Phi_p : T_p \to \mathrm{Diff}_p$. Для этого рассмотрим произвольный вектор $v \in T_p$, выберем представляющий его путь $\gamma : [0,1] \to U$, где $\gamma(0) = p$, и сопоставим ему функционал

$$\Phi(v) = X_v : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad X_v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))(0)$$

Задача 2.5. *1) Докажите, что оператор X_v не зависит от выбора представляющего его пути γ и является дифференцированием в точке p.*

2) Докажите, что вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ из примера 2.1 отвечает дифференцирование $X_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(f) = \Phi(e_i)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Теорема 2.1. *Отображение $\Phi : T_p \to Diff_p$ является изоморфизмом векторных пространств.*

Proof. Докажем гомоморфность отображения Φ. Пусть γ^1 и γ^2 — пути, представляющие вектора v_1 и v_2. Рассмотрим карту (U, φ), где $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ и положим $\tilde{\gamma}^i = \varphi\gamma^i$, $\tilde{f} = (\varphi^{-1})^*$. Тогда

$$X_{v_1+v_2}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma^1(t)+\gamma^2(t))(0) = \frac{d}{dt}\tilde{f}(\tilde{\gamma}^1(t)+\tilde{\gamma}^2(t))(0) = \mathtt{grad} f(p)(\gamma^1(t)+\gamma^2(t))'(0) =$$

$$\mathtt{grad} f(p)(\gamma^1(t))'(0) + \mathtt{grad} f(p)(\gamma^2(t))'(0) = \frac{d}{dt} f(\gamma^1(t))(0) + \frac{d}{dt} f(\gamma^2(t))(0) = X_{v_1}(f) + X_{v_2}(f).$$

Свойство $X_{kv} = kX_v$ доказывается аналогично.

Построим теперь отображение Φ^{-1}. Отображение φ устанавливает изоморфизм между векторными касательными пространствами многообразия M в точке p и многообразия $\mathbb{R}^n$ в точке 0 (лемма 2.3). Это же отображение φ устанавливает изоморфизм между пространством дифференцирований многообразия M в точке p и пространством дифференцирований многообразия $\mathbb{R}^n$ в точке 0 (лемма 2.4). Более того, отображение φ переводит гомоморфизм $\Phi_p : T_p \to \mathrm{Diff}_p$ в гомоморфизм $\Phi_0 : T_0 \to \mathrm{Diff}_0$. Поэтому нам достаточно построить отображение Φ^{-1} для случая $(M, p) = (\mathbb{R}^n, 0)$.

Для произвольной гладкой функции $f(x) = f(x^1, \ldots, x^n)$ на $U \subset \mathbb{R}^n$ формула Тейлора дает разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) x^i + r_2(x),$$

где $r_2(x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\theta x)x^i x^j = h_{ij}(x)x^i x^j$ — остаточный член в форме Лагранжа. Согласно свойствам оператора дифференцирования

$$X(f(0)) = 0 \quad \text{и} \quad X(h_{ij}(x)x^i x^j) = h_{ij}(X(x^i)0 + 0X(x^j)) = 0$$

Таким образом,

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)X(x^i).$$

Положим теперь

$$w = (w^1, \dots, w^n) \text{ где } w^i = X(x^i).$$

Тогда $\Phi(w) = X$, поскольку

$$X_w(f) = \frac{d}{dt}f(wt)(0) = \mathtt{grad} f(0)(w^1, \dots, w^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)X(x^i) = X(f).$$

$\square$

2.3. **Координатное описание касательного вектора.** Введем важное обозначение, которое делает вычисления значительно менее громоздкими. Если в мономе встречаются 2 одинаковых индекса (например индекс i меняющийся от 1 до n), причем один из индексов сверху, а другой снизу, то такой моном означает сумму мономов такого типа во всем диапазоне изменения индекса. Например, $T^i x_i$ будет означать $\sum_{i=1}^{n} T^i x_i$.

Согласно примеру 2.1, векторные пространства $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ естественно изоморфны. Базисному вектору $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ отвечает при этом вектор, обозначаемый $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Далее мы будем отождествлять пространства $\mathbb{R}^n$ и $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, считая, что $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}(x_0)$.

Рассмотрим в окрестности точки $p \in M$ карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ такую, что $\varphi(p) = x_0$. Согласно задаче 2.3, карта (U, φ) порождает естественный изоморфизм между T_pM и $T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Карта (U, φ) позволяет, таким образом, сопоставить касательному вектору $v \in T_pM$ вектор $(T^1, \dots, T^n) = T^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x_0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Числа $(T^1, \dots, T^n)$ называются *координатами касательного вектора v в карте* (U, φ). Согласно задаче 2.5, вектору с координатами $(T^1, \dots, T^n)$ отвечает дифференцирование $f \mapsto T^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ в точке x_0.

Посмотрим теперь, как меняются координаты касательного вектора при замене карты. Рассмотрим принадлежащие гладкому атласу и содержащие точку p карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi(p) = x_0$ и $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{x}_0$. В произвольной точке $q \in U \bigcap \tilde{U}$ эти отображения имеют вид $\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q))$ и $\tilde{\varphi}(q) = (\tilde{x}^1(q), \dots, \tilde{x}^n(q))$. Отображение перехода $\tilde{\varphi}\varphi^{-1} : \varphi(U \bigcap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \bigcap \tilde{U})$ является гладкой заменой координат $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$. Таким образом, согласно теоремам многомерного анализа,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x_0) = e_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0)e_j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}_0).$$

Рассмотрим теперь произвольный касательный вектор v. Пусть его координаты в карте (U, φ) равны $(T^1, \dots, T^n)$. Тогда

$$v = T^i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_0) = T^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{T}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}_0), \quad \text{где} \quad \tilde{T}^j = T^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0).$$

Таким образом, координаты вектора v в карте $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ равны

$$\tilde{T}^j = T^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0).$$

Это соотношение позволяет определить касательный вектор в точке $p \in M$, как операцию, сопоставляющую каждой карте (U, φ) вектор

$$(T^1, \dots, T^n) \in \mathbb{R}^n$$

таким образом, что при гладкой замене карты вида $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$ вектор $(T^1, \dots, T^n)$ переходит в вектор

$$(\tilde{T}^1, \dots, \tilde{T}^n) = (T^i \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i}(x_0), \dots, T^i \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^i}(x_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Это определение, несмотря на всю свою громоздкость, оказывается очень удобным при конкретных вычислениях.

2.4. **Дифференциал отображения.** В каждой точке $p \in M$ гладкое отображение $F : M \to N$ порождает линейное отображение касательных пространств $dF_p : T_p \to T_{F(p)}$, которое и называется *дифференциалом отображения F в точке p*. Мы определяли касательное пространства 3 разными способами. Проследим, как строится дифференциал при разных определениях касательного пространства.

Пусть мы определяем вектор $v \in T_p$ как класс эквивалентности путей из точки $p \in M$ и $\gamma : [0,1] \to M$ один из таких путей. Под действие F этот путь переходит в некоторый путь $(F\gamma) : [0,1] \to N$ с началом в точке $F(p)$.

Задача 2.6. *Докажите, что отображение F переводит эквивалентные пути в эквивалентные.*

Дифференциалом $dF_p : T_p \to T_{F(p)}$ называется отображение, сопоставляющее классу эквивалентности пути $\gamma : [0,1] \to M$ класс эквивалентности пути $(F\gamma) : [0,1] \to N$.

Если мы рассматриваем вектор касательного пространства как дифференцирование X в точке $p \in M$, то его образ под действием дифференциала dF_p — это дифференцирование $dF_p(X) : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ в точке $F(p) \in N$. Оно определяется равенством $(dF_p(X))(g) = X(gF)$ на функциях $g \in \mathcal{F}(V)$ определенных в окрестности $V = F(U)$ точки $F(p)$ (см. задачу 2.4 и теорему 2.1).

Выясним теперь как дифференциал отображения преобразует касательные векторы, определенные, как векторы $T \in \mathbb{R}^n$ и $\tilde{T} \in \mathbb{R}^m$, порожденные картами $(U, \varphi) \subset M$ и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \subset N$. Мы считаем, что $\tilde{U} = F(U)$ и $\varphi(p) = \tilde{\varphi}(F(p)) = 0$. Чтобы не усложнять обозначения мы отождествим U и $\tilde{U}$ с их образами под действием диффеоморфизмов φ и $\tilde{\varphi}$. То есть мы будем считать, что

$$U \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \dots, x^n)\},$$

$$\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m = \{\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)\}.$$

$$p = F(p) = 0, \quad F(x) = (F^1(x), \dots, F^m(x)).$$

Для описания зависимости между T и $\tilde{T}$ мы используем дифференцирования в точке 0, порожденные этими векторами, и уже найденный закон преобразования дифференцирований при отображениях. Согласно нашим определениям, вектору $T = (T^1, \dots, T^n)$ отвечает дифференцирование в 0

$$T^i \frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R} \quad \text{такое, что} \quad T^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = T^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}(U).$$

Дифференциал dF_0 переводит это дифференцирование в дифференцирование

$$(dF_0(T^i \frac{\partial}{\partial x^i}))(\tilde{f}) = (T^i \frac{\partial}{\partial x^i})(\tilde{f}F) = T^i \frac{\partial(\tilde{f}F)}{\partial x^i}(0) \quad \text{функций} \quad \tilde{f} \in \mathcal{F}(\tilde{U}).$$

Используя правило дифференцирования сложной функции находим что

$$T^i \frac{\partial(\tilde{f}F)}{\partial x^i}(0) = T^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) = T^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0) = \tilde{T}^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0),$$

где числа

$$\tilde{T}^j = T^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0)$$

являются по определению координатами вектора $dF_0(T^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ в карте $\tilde{U}$.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}^1 \\ \\ \tilde{T}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ \\ T^n \end{pmatrix},$$

то есть $\tilde{T} = dF_0(T)$ где

$$dF_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(0) \end{pmatrix}$$

— это матрица Якоби дифференциала отображения $\tilde{\varphi} F \varphi^{-1}$ в точке 0.

Таким образом, мы доказали, в частности, что *для гладкого отображения области $\mathbb{R}^m$ в область $\mathbb{R}^n$ определенный нами дифференциал отображения dF_p совпадает с дифференциалом отображения, определенным ранее в теории функций многих переменных.*

3. Гладкие отображения

3.1. **Регулярные точки отображения.** Рассмотрим гладкое отображение $F : M \to N$ гладких многообразий M и N. Точка $p_0 \in M$ называется *регулярной точкой отображения* F, если гомоморфизм $dF_{p_0} : T_{p_0}M \to T_{F(p_0)}N$ является эпиморфизмом.

Из определения сразу следует, что регулярных точек не существует, если $\dim M \leq \dim N$. Более того, при $\dim M \geq \dim N$ точка регулярна, если и только, если ранг дифференциала в этой точке равен $\dim N$.

Задача 3.1. *Доказать что регулярные токи образуют открытое в M подмножество.*

Точка $q_0 \in N$ называется *регулярным значение отображения* F, если или $q_0 \in N \setminus F(M)$, или все точки прообраза $F^{-1}(q_0)$ являются регулярными точками отображения F.

Теорема 3.1. *Пусть* $q_0 \in F(M)$ *— регулярное значение гладкого отображения* $F : M \to N$. *Тогда* $L = F^{-1}(q_0)$ *гладкое многообразие размерности* $\dim L = \dim M - \dim N$. *Более того, координаты в окрестности* $p_0 \in F^{-1}(q_0) \subset M$ *можно выбрать таким образом, чтобы часть из них образовывала координаты на* L.

Proof. Пусть $F(p_0) = q_0$. Рассмотрим на M и N карты (U, φ) и (V, ψ) такие, что $\varphi(p_0) = \psi(q_0) = 0$ и U состоит из регулярных точек отображения F. Диффеоморфизмы φ и ψ переносят на U и V координаты из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ (где $m = \dim M$ и $n = \dim N$) то есть, задают в окрестностях точек p_0 и q_0 координаты $(x^1, \ldots, x^m)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$.

В этих координатах отображение F запишется в виде отображения

$$f = (f^1, \ldots, f^n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Содержащая точку $p_0 = 0$ компонента связности $f^{-1}(0)$ множества $L = F^{-1}(q_0)$ описывается уравнением $f(0) = 0$. Следовательно, L — это множество уровня гладкого отображения. Таким образом, утверждение о гладкости многообразия L и свойствах координат следует из теоремы 1.2 и конструкции локальных карт, приведенной схеме доказательства теоремы. $\square$

3.2. **Теорема Сарда о критических значениях.** В этом разделе мы докажем важную теорему, доказанную американским математиком А.Сардом в 1942 году.

Перенесем сначала определение множеств (лебеговой) меры 0 с подмножеств в $\mathbb{R}^n$ на подмножества гладкого n-мерного многообразия N. По определению, мы говорим, что *подмножество* $L \subset N$ *имеет меру* 0, если для любой карты (U, φ) многообразия N множество $\varphi(L \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет n-мерную лебегову меру 0.

Следующая задача доказывает, что в определении подмножества L меры 0 свойство "множество $\varphi(L \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0" достаточно проверить для одного семейства карт, покрывающих подмножество L.

Задача 3.2. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое множество,* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *— гладкое отображение, регулярное во всех точках множества* $L \subset U$ *меры 0. Тогда* $f(L)$ *тоже имеет меру 0.*

Нерегулярная точка гладкого отображения $f : M \to N$ называется критической. Другими словами, точка $x \in M$ называется *критической*, если дифференциал $df_x : T_x \to T_{f(x)}$ имеет ранг меньший $\dim N$. Образ $f(x)$ критической точки называется *критическим значением.*

Теорема 3.2. *(А.Сард) Множество критических значений гладкого отображения имеет меру 0.*

Используя сепарабельность, покроем многообразия M и N счетным семейством гладких карт. Теорема Сарда сводится теперь к следующему утверждению:

Теорема 3.3. *Рассмотрим открытое подмножество* $U \subset \mathbb{R}^m$ *и гладкое отображение* $f : U \to \mathbb{R}^n$. *Тогда множество его критических значений имеет меру нуль.*

Утверждение теоремы очевидно при $n = 0$. Так что далее мы считаем, что $n > 0$. Доказательство будет вестись индукцией по m. При $m = 0$ утверждение очевидно. Докажем утверждение теоремы для $0 < m = K$, считая что для $m < K$ утверждение уже доказано.

Рассмотрим множество критических точек $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$ отображения $f(x) = (f^1(x), \dots f^n(x))$. Нам надо доказать, что множество $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0.

Обозначим через C_k множество таких точек $x \in U$, где все частные производные отображения f порядка $\leqslant k$ равны 0. Множества C_k образуют последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots.$$

Кроме того,

$$C = (C \supset C_1) \cup (C_1 \supset C_2) \cup \dots \cup (C_{k-1} \supset C_k) \cup C_k.$$

Поэтому доказательство теоремы 3.3 следует из следующих трёх лемм

Лемма 3.1. *Образ $f(C \backslash C_1)$ имеет меру нуль.*

Лемма 3.2. *Образ $f(C_k \backslash C_{k+1})$ имеет меру нуль при $k \geqslant 1$.*

Лемма 3.3. *Множество $f(C_k)$ имеет меру нуль при $k > \frac{m}{n} - 1$.*

Proof. леммы 3.1. Для $n = 1$ лемма верна, поскольку в этом случае $C = C_1$. Далее $n > 1$. Идея доказательства состоит в представлении множества B критических значений отображения f от m переменных виде семейства $B = \bigcup(t, B_t)$, где B_t — критические значения вспомогательного отображения g_t от $m - 1$ переменных.

Сначала заменой переменных в f в малой окрестности произвольной точки $x_0 \in C \setminus C_1$ мы построим вспомогательное отображение g от m переменных с тем же множеством критических значений.

В точке $x_0 \in C \setminus C_1$ одна из частных производных, например $\partial f^1 / \partial x^1$, не равна 0. Рассмотрим отображение

$$h : U \to \mathbb{R}^m, \quad \text{где} \quad h(x) = (f^1(x), x^2, \dots, x^m).$$

В точке x_0 дифференциал dh_{x_0} описывается невырожденной матрицей Якоби.

$$\begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & * & & \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на открытое множество $V' = h(V) \subset \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим замену переменных

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to V \to \mathbb{R}^n.$$

Множество критических значений любого отображение не меняется при диффеоморфных заменах переменных. Поэтому множество критических значений отображения g совпадает с множеством $B = f(V \cap C)$ критических значений отображения f.

С другой стороны, для $t = f^1(x)$,

$$g(t, x^2, ..., x^m) = f \circ h^{-1}(t, x^2, ..., x^m) = f(x^1, x^2, ..., x^m) = (t, f^2(x), ..., f^m(x)).$$

Таким образом,

$$g(t, x^2, ..., x^m) = (t, g_t(x^2, ..., x^m)) \quad \text{где} \quad g_t : V' \bigcap \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{n-1}.$$

Матрица Якоби отображения $g(t, x^2, ..., x^m)$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \{\partial g_t^i / \partial x^j\} \end{pmatrix}.$$

Поэтому множество критических точек отображения $g(t, x^2, ..., x^m)$ совпадает с $\bigcup\limits_t (t, C_t)$, где C_t — множество критических точек отображения $g_t(x^2, ..., x^m)$. Таким образом, множество B критических значений отображения g является объединением

$$B = \bigcup_t f(t, C_t) = \bigcup_t (t, B_t),$$

где $B_t = g_t(C_t)$ множеств критических значений отображений g_t.

Согласно предположению индукции, $n - 1$ мера множества B_t критических значений гладкого отображения $g_t(x^2, ..., x^m)$ равна 0. Согласно хорошо известной теоремы теории меры [1] отсюда следует, что n-мера и самого множества критический значений $f(V \cap C) = B = \bigcup\limits_t (t, B_t)$ также равна 0.

В виду сепарабельности многообразия M, множество $C \backslash C_1$ покрывается счетным числом окрестностей V нужного нам типа и, следовательно, мера $f(C \backslash C_1)$ также равна 0. □

Proof. леммы 3.2. Доказательство этой леммы похоже на доказательство леммы 3.1. Для доказательства мы строим отображение g_0 от $m - 1$ переменной, критические значения которой совпадают с критическими значениями f.

Для каждого $x_0 \in C_k \backslash C_{k+1}$ существует $(k+1)$-я частная производная отображения f, например $\partial^{k+1} f^1 / \partial x_1 \partial x_{s_2} ... \partial x_{s_{k+1}}$, отличная от нуля в точке x_0. Рассмотрим отображение

$$w(x) = \partial^k f^1 / \partial x^{s_2} ... \partial x^{s_{k+1}}.$$

Тогда $w(x_0) = 0$ (поскольку $x_0 \in C_k$), но $\partial w / \partial x^1(x_0) \neq 0$ (поскольку $\partial^{k+1} f^1 / \partial x_1 \partial x_{s_2} ... \partial x_{s_{k+1}}(x_0) \neq 0$).

Рассмотрим отображение

$$h : U \to \mathbb{R}^m, \quad \text{где} \quad h(x) = (w(x), x^2, ..., x^m).$$

В точке x_0, дифференциал dh_{x_0} описывается невырожденной матрицей Якоби.

$$\begin{pmatrix} \partial w / \partial x^1 & * & & \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] С.М.Натанзон "Краткий курс математического анализа" МЦНМО, М., 2008, Часть 2 Теорема 15.1.

Следовательно, h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на открытое множество $V' = h(V) \subset \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим замену переменных

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to V \to R^n$$

и его ограничение

$$g_0 = g\big|_{(0\times R^{m-1})} : (0 \times R^{m-1}) \cap V' \to R^n.$$

Если $x \in C_k$, то $h(x) = (w(x), x^2, ..., x^m) = (0, x^2, ..., x^m)$, откуда

$$f(C_k \cap V) = gh(C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V).$$

Все производные g_0 порядка $\leqslant k$ равны нулю на $h(C_k \cap V)$б в виду $f = g_0 h$. Поэтому, в виду $k \geq 1$, все точки множества $g_0 h(C_k \cap V)$ являются критическими значениями отображения g_0. С другой стороны, отображение g_0 зависит от $m-1$ переменных, и следовательно, по предположению индукции, мера множества $f(C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V)$ равна 0 в R^n.

Покрывая $C_k \backslash C_{k+i}$ счетным числом таких окрестностей V, получаем утверждение леммы. □

Proof. леммы 3.3. Рассмотрим $k > \frac{m}{n} - 1$. Обозначим через $I(x, \delta)$ замкнутый куб с центром x и ребром δ.

Рассмотрим $x \in C_k$. Все частные производные отображения f порядка меньше $k+1$ равны 0 в точке x. Следовательно, по формуле Тейлора, существует $\delta > 0$ такое, что

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + R(x,h), \quad \| R(x,h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1},$$

для всех $x \in C_k \cap I(x, \delta)$ и $x + h \in I(x, \delta)$.

Положим $I = I(x, \delta)$ и докажем, что мера множества $f(C_k \cap I)$ равна 0. Разделим I на r^m кубиков с ребром δ/r. Пусть I_y - содержащий точку $y \in C_k \cap I$ кубик этого разбиения. Тогда любая точка куба I_y может быть записана в виде

$$y + h \quad \text{где} \quad \| h \| \leqslant \sqrt{m}(\delta/r).$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_y) \subset \mathbb{R}^n$ лежит в кубе с центром в точке $f(y)$ и ребром

$$c \| h \|^{k+1} \leqslant c(\sqrt{m}(\delta/r))^{k+1} = a/r^{k+1}, \quad \text{где} \quad a = c(\sqrt{m}\ \delta)^{k+1}.$$

Следовательно, объем множества $f(I_y)$ не превышает $a^n/r^{(k+1)n}$.

Таким образом, множество $f(C^k \cap I)$ содержится в объединении r^m кубиков общим объемом

$$V \leqslant r^m a^n / r^{(k+1)n} = a^n r^{m-(k+1)n} = a^n r^{m-(\alpha+\frac{m}{n})n} \leq a^n r^{-\alpha n}, \quad \text{где} \quad \alpha = k + 1 - \frac{m}{n} > 0.$$

Объем V стремится к 0 при $r \to \infty$. Следовательно, множество $f(C_k \cap I)$ имеет меру нуль. Покрывая C_k счетным числом таких кубиков I находим, что мера множества $f(C_k)$ тоже равно 0. □

Вот первые следствия теоремы Сарда.

Следствие 3.1. *Если $F : M \to N$ гладкое отображение и $\dim M < \dim N$, то $N \setminus F(M) \neq \emptyset$*

Задача 3.3. *Множество регулярных значений гладкого отображения $F : M \to N$ открыто и всюду плотно в N.*

3.3. **Теорема Уитни о вложении многообразий.** Рассмотрим гладкие многообразия M и N размерностей m и n. Гладкое отображение $f : M \to N$ называется *погружением*, если ранг отображения $df \mid_x$: $T_x \to T_{f(x)}$ при любом x равен m. Это означает, что линейное отображение $df \mid_x$ касательных пространств является мономорфизмом для всех $x \in M$. Отсюда следует, в частности, что $m \leq n$. Используя теорему об обратных отображениях, находим, что в этом случае f устанавливает диффеоморфизм между некоторой окрестностью $U(x)$ точки $x \in M$ и окрестностью её образа $f(U(x))$ в многообразии N. Однако, "в целом" отображение f вовсе не обязано быть взаимно однозначным.

Погружение $f : M \to N$ будем называть *вложением*, если f устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$.

Задача 3.4. *Найдите гладкое отображение $f : M \to N$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$, но не является погружением.*

Нам понадобиться следующая несложная задача, известная вам из курса анализа [2].

Задача 3.5. *Пусть $A \subset B \subset \mathbb{R}^m$ — гомеоморфные $\mathbb{R}^m$ открытые множества такие, что замыкание $\bar{A}$ лежит в B. Тогда существует гладкое отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ такая, что $f(A) = 1$, $0 < f(B \setminus A) < 1$ и $f(\mathbb{R}^m \setminus B) = 0$*

Теорема 3.4. *Любое компактное гладкое многообразие M может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N.*

Proof. Рассмотрим конечный набор из k карт $\{(U_i, \varphi_i = (\varphi_i^1, \ldots, \varphi_i^m)\}$, покрывающий многобразии M. Рассмотрим открытое покрытие $\{V_i | i = 1, \ldots, k\}$, вписанное в покрытие $\{U_i | i = 1, \ldots, k\}$, то есть такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$ и $\bigcup\limits_i V_i = M$.

Рассмотрим гладкую функцию $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, равную 1 на V_i и 0 вне U_i (см. задачу 3.5). Продолжим функции $\varphi_i^j|_{V_i}$ до гладких функций $\psi_i^j : M \to \mathbb{R}$, где $\psi_i^j(x) = f_i(x)\varphi_i^j(x)$ при $x \in U_i$ и $\psi_i^j(x) = 0$ при $x \in M \setminus U_i$.

Докажем теперь, что набор функций $\{\psi_i^j(1 = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m), f_i(1 = 1, \ldots, k)\}$ задает вложение $F : M \to \mathbb{R}^{km+k}$. Любая точка $x \in M$ принадлежит некоторой области V_i. В этом случае ранг дифференциала отображения $(\psi_i^1, \ldots, \psi_i^m)$ в точке x равен равен рангу отображения φ_i и, следовательно, равен m. С другой стороны, функции $\psi_i^1, \ldots, \psi_i^m$ — это часть координат отображения F. Следовательно, ранг F в произвольной точке x не меньше m. С другой стороны, этот ранг не больше m, поскольку $\dim M = m$. Следовательно, ранг отображения F равен m в каждой точке $x \in M$ и F — погружение.

Докажем, что F переводит разные точки в разные точки. Пусть $x \neq y$ и $x \in V_i$. Тогда $f_i(x) = 1$. Если $f_i(y) \neq 1$, то $F(x) \neq F(y)$, поскольку f_i — это одна из координат отображения F. Если $f_i(y) = 1$, то $y \in V_i$, и значит $\psi_i(x) = \varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) = \psi_i(y)$. Следовательно, $F(x) \neq F(y)$. □

[2] С.М.Натанзон "Краткий курс математического анализа" МЦНМО, М., 2008, Часть 2 Теорема 18.1.

Найдем теперь оценку для минимальной размерности векторного пространства, куда можно вложить гладкое многообразие размерности m.

Теорема 3.5. *(Уитни) Любое гладкое компактное m-мерное гладкое многообразие M можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2m}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Proof. Рассмотрим любое гладкое вложение $\varphi : M \to R^N$, существующее согласно теореме 3.4. Чтобы не загромождать обозначения, мы будем обозначать образ $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^N$ той же буквой M. Докажем, что при $N > 2m$ существует проекция $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ на гиперплоскость $L \subset \mathbb{R}^N$ такая, что $\pi|_M$ — погружение.

Касательное пространство T_xM к многообразию M в точке $x \in M \subset \mathbb{R}^N$ естественно отождествляется с плоскостью $T_x \subset \mathbb{R}^N$ касающейся многообразия M в точке x. Эта точка является также нулем касательного пространства T_x (см. начало раздела "Касательные векторы").

Обозначим через Q множество пар (x, ℓ), где $x \in M$ и ℓ — проходящая через x прямая в касательном пространстве T_x. Каждой прямой ℓ отвечает параллельная ей и проходящая через $0 \in \mathbb{R}^N$ прямая в $\mathbb{R}^N$. Эта прямая является точкой проективного пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$. Построенное соответствие порождает отображение

$$\alpha : Q \to \mathbb{R}P^{N-1}.$$

Задача 3.6. *Докажите, что Q — гладкое многообразие размерности $2m - 1$ и α — гладкое отображение.*

Согласно задаче 3.6 и следствию 3.1, дополнение $\mathbb{R}P^{N-1} \setminus \alpha(Q)$ не пусто. Рассмотрим прямую $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus \alpha(Q)$. Образ $\alpha(Q)$ состоит из прямых в $\mathbb{R}^N$, параллельных одной прямой из T_x для хотя бы одной точки $x \in M$. Таким образом, для любого $x \in M$ касательное пространство T_x не содержит прямых параллельных ℓ_0.

Рассмотрим теперь ортогональную ℓ_0 и проходящую через 0 гиперплоскость $L \subseteq \mathbb{R}^N$. Рассмотрим ортогональную проекцию $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ на эту гиперплоскость и её ограничение $\tilde{\pi} = \pi\big|_M : M \to L$.

Дифференциал $d\tilde{\pi}_x : T_x \to T_{\tilde{\pi}(x)} = L$ в точке $x \in M$ — это ортогональная проекция плоскости T_x на L. Его ядро состоит из векторов ортогональных L и, следовательно, параллельных ℓ_0. Таким образом, ядро дифференциала $d\tilde{\pi}_x$ нулевое для любого $x \in M$. Следовательно, $\tilde{\pi} = \pi\big|_M : M \to L = \mathbb{R}^{N-1}$ — погружение.

Мы доказали, что если $N > 2m$, то существует направление $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1}$, проектирование по которому является погружением в пространство $\mathbb{R}^{N-1}$. Если $N - 1 > 2m$, то, повторяя рассуждения, мы находим погружение многообразия M в $\mathbb{R}^{N-2}$. Продолжая этот процесс, мы находим погружение многообразия M в пространство $\mathbb{R}^{2m}$.

Докажем теперь, что при $N > 2m + 1$ существует ортогональная проекция на гиперплоскость $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ такая, что $\pi|_M$ — вложение.

Рассмотрим множество пар $G = \{(x, y) \in M \times M | x \neq y\}$. Рассмотрим отображения

$$\beta : G \to \mathbb{R}P^{N-1},$$

которое сопоставляет паре $(x, y) \in G$ прямую $\beta(x, y) \subset \mathbb{R}P^{N-1}$, параллельную прямой проходящую через точки x, y.

Пусть $\ell \in \mathbb{R}^{N-1}$ и $\pi_\ell : \mathbb{R}^N \to L$ — ортогональная проекция на ортогональную ℓ гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1} \cong L \subset \mathbb{R}^N$. Направление $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ назовем *запрещенным*, если существуют $x \neq y \in M$ такие, что $\pi_\ell(x) = \pi_\ell(y)$. Тогда множество запрещенных направлений совпадает с образом $\beta(G)$.

Задача 3.7. *Докажите, что G — гладкое многообразие размерности $2m$ и β — гладкое отображение.*

Размерность многообразия G равна $2m$. Следовательно, при $2m < N-1$ все точки множества G являются критическими для отображения β. В этом случае, согласно теореме Сарда, множество $\beta(G)$, как и $\alpha(Q)$, имеет меру 0 в $\mathbb{R}P^{N-1}$ и, значит, их дополнение не пусто. Ортогональное проектирование вдоль прямой $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus (\alpha(Q) \cup \beta(G))$ является погружением, не склеивающим точки, то есть вложением в $L \cong \mathbb{R}^{N-1}$.

Итак, мы доказали, при $N-1 > 2m$ существует вложение многообразия M в пространство $\mathbb{R}^{N-1}$. Проделав такое проектирование достаточное число раз, получаем вложение многообразия M в пространство $\mathbb{R}^{2m+1}$. $\square$

Замечание 3.1. *Известна более сложная теорема (мы ее не доказываем), что любое n-мерное многообразие M можно гладко вложить $\mathbb{R}^{2n}$. В общем случае эта оценка уже неулучшаема.*

4. Векторные расслоения

4.1. **Определения и примеры.** Язык векторных расслоений — это универсальный язык современной математики. Он был разработан во второй половине 20 века в работах Ж.Лере, Р. Годемана и др. Это язык удобен для описания отображений, где множество возможных значений точки не постоянно (как в случае обычных отображений $F : M \to N$), а меняется от точки к точке (т.е. $F(x) \in N(x)$). Перейдем к формальным определениям.

Гладкое отображение гладких многообразий $\pi : E \to X$ называется *вещественным локально тривиальным векторным расслоением ранга* r, если

1) *слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности r;

2) для каждой точки $p \in X$ существует такая окрестность $U \subset X$ и такое гладкое отображение $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, называемое *(локальной) тривиализацией*, что $h(E_p) = p \times \mathbb{R}^r$ и отображение $h|_{E_p} : E_p \to p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ является изоморфизмом векторных пространств для любого $p \in U$.

Многообразия E и X называются соответственно *(тотальным) пространством* и *базой* расслоения. Далее мы будем для краткость опускать слова "вещественное локально тривиальное".

Векторное расслоение ранга r можно представлять себе как семейство r-мерных векторных пространств E_p, параметризованных точками базы $p \in X$, которое в окрестности каждой точки базы представлено в виде $U \times \mathbb{R}^r$

Пример 4.1. *Тривиальное расслоение $\pi : X \times \mathbb{R}^r \to X$.*

Пример 4.2. *Касательное расслоение $\pi : E \to X$, где $E_p = T_p$.*

Пример 4.3. *Универсальное расслоение над грассмановым многообразием. (Вещественным) грассмановым многообразием $\mathbb{R}G_{r,n}$ называется множество всех r-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Универсальным расслоением называется расслоение $\pi_{r,n} : E \to \mathbb{R}G_{r,n}$ ранга r, слой которого E_p над точкой $p \in \mathbb{R}G_{r,n}$ совпадает с подпространством в $\mathbb{R}^n$, представляющим точку p. Расслоение называется "универсальным", потому что в расслоение такого типа "вкладывается" любое другое расслоение* [3].

Рассмотрим пару тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $h_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ и точку $p \in U_\alpha \bigcap U_\beta$. Тривиализации h_α и h_β порождают отображение $h_\beta h_\alpha^{-1} : p \times \mathbb{R}^r \to p \times \mathbb{R}^r$, действующее на втором сомножителе как отображение векторных пространств. Этот автоморфизм, как и любой автоморфизм арифметического пространства $\mathbb{R}^r$, описывается матрицей $g_{\alpha\beta}(p) \in GL(r, \mathbb{R})$, то есть $h_\beta h_\alpha^{-1} : p \times v \to p \times g_{\alpha\beta}(p)v$.

Таким образом, мы построили отображение $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R})$, которое называется *функцией перехода между локальными тривиализациями α и β*.

Задача 4.1. *Постройте системы локальных тривиализаций для касательного и универсального расслоений и найдите функции перехода между этими тривиализациями.*

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \Upsilon\}$ открытое покрытие гладкого многообразия X. Тогда семейство гладких отображений*

$$\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$$

является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения $\pi : E \to X$, если и только если

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \quad \text{и} \quad g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{на} \quad U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma \quad \text{для любых} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon.$$

Proof. Соотношения $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода между тривиализациями векторного расслоения означают, что тождественное преобразование векторного пространства описывается единичной матрицей.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим семейство гладких отображений

$$\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$$

такое, что $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Тогда $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

Рассмотрим множество $\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} (U_\alpha \times \mathbb{R}^r)$. Точки $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p, w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать *родственными*, если $v = g_{\alpha\beta} w$. Отношение родственности является отношением эквивалентности: рефлексивность следует из $g_{\alpha\alpha} = 1$, симметричность из $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ и транзитивность из $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает множество E. Отображения $(p, v) \mapsto p$ порождают векторное расслоение $\pi : E \to X$, где $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и функции перехода совпадают с $g_{\alpha\beta}$. $\square$

[3] С.М.Натанзон "Введение в пучки, расслоения и классы Черна" МЦНМО, М., 2010, Теорема 8.1

Использую лемму 4.1, мы можем задавать векторные расслоения над X, указывая покрытие многообразия X и семейство функций перехода, удовлетворяющее условиям леммы 4.1.

Морфизмом векторного расслоения $\pi : E \to X$ в векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ называется пара гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ таких, что $\tilde{\pi}\varphi_E = \varphi_X\pi$ и ограничение $\varphi_E|_p$ отображения φ_E на каждый слой $E|_p = \pi^{-1}(p)$ является гомоморфизмом в $\tilde{E}|_{\varphi_X(p)} = \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_X(p))$. Как обычно, обратимый морфизм в классе морфизмов расслоений называется *изоморфизмом расслоений.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

Особую роль играют морфизмы пучков с общей базой, то есть морфизмы, где $\widetilde{X} = X$ и φ_X — тождественное отображение. Множество таких морфизмов обозначается $Hom(E, \widetilde{E})$. Изоморфизм φ_E для таких расслоений называется *эквивалентностью расслоений.*

Задача 4.2. *Доказать, что семейства переходных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ на гладком многообразии $(X\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$, задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство гладких отображений $l_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\beta g_{\alpha,\beta} l_\alpha^{-1}$.*

4.2. **Сечения расслоений.** *Сечением векторного расслоения* $\pi : E \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется гладкое отображение $s : U \to E$ такое что πs — тождественное отображение. Таким образом, сечение сопоставляет каждой точке $p \in U$ вектор из E_p.

Множество сечений $\mathcal{F}_\pi(U)$ расслоения π над подмножеством $U \subset X$ образуют векторное пространство. Более того, мы можем поточечно умножить сечение на гладкую функцию, получая при этом сечение того же расслоения. Это задаёт на множестве сечений $\mathcal{F}_\pi(U)$ структуру модуля над алгеброй $\mathcal{F}(U)$ гладких функций на U.

Набор сечений $\{s_1, \dots, s_r\} \subset \mathcal{F}_\pi(U)$ назовем *базисным* набором сечений, если вектора $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$ образуют базис векторного пространства E_p при каждом $p \in U$. В этом случае произвольное сечение имеет вид $f^i(p)s_i(p)$, где $\{f^i(p)\} \subset \mathcal{F}(U)$ — гладкие функции на U.

Арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^r$ имеет выделенный базис $\{e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) | i = 1, \dots, r\}$. Векторам базиса отвечают сечения $e_i(p) = p \times e_i$ тривиального расслоения $U \times \mathbb{R}^r \to U$, образующие базисный набор сечений. Тривиализации $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ переводит его в базисный набор сечений $s_i(p) = h^{-1}(e_i(p))$ расслоения π над U.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{R}^r \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_U} & & \Big\downarrow \\ U & = & U \end{array}$$

Наоборот, базисный набор сечений $\{s_i(p)|i = 1, \dots, r\}$ расслоения π над U порождает тривиализацию $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, где $h(\xi^i s_i(p)) = p \times \xi^i e_i$.

Таким образом, аксиому 2) о локальной тривиализации из определения векторного расслоения можно заменить на

2') для каждой точки $p \in X$ существует такая окрестность $U \subset X$, допускающая базисный набор сечений расслоения π над U.

Сечение тривиального расслоения $\pi : E \to X \times \mathbb{R}^r$ порождают вектор-функцию $s : X \to \mathbb{R}^r$. Сечение произвольного расслоения — это аналог вектор-функции, где каждая точка отображается в собственное векторное пространство. Далее мы увидим, что такие отображения играют центральную роль в теории многообразий.

4.3. **Сопряжение и тензорное произведение расслоений.** Векторные расслоения $\pi : E \to X$ можно рассматривать как специальные семейства $\{E_p|p \in X\}$ векторных пространств. Такой подход позволяет переносить на векторные расслоения операции над векторными пространствами.

Сопряжение расслоений.

Рассмотрим (локально тривиальное) векторное расслоение $\pi : E \to X$. Заменим каждый слой E_p на сопряженное пространство E_p^*. Каждому базису $\{s_i|i = 1, \dots, r\}$ пространства векторного E_p отвечает сопряженный базис $\{s_j^*|j = 1, \dots, r\}$ сопряженного пространства E_p^*, где $s_i^*(s_j) = \delta_{ij}$.

Рассмотрим объединение

$$E^* = \bigcup_p E_p^*$$

и отображение $\pi^* : E^* \to X$, где $\pi^*(E_p^*) = p$. Докажем, что $\pi^* : E^* \to X$ — локально тривиальное векторное расслоение. Для этого достаточно проверить, что каждая точка $p \in X$ имеет окрестность $U \subset X$, над которой существует базисный набор сечений расслоения π^* (аксиома 2' для π^*). Сопоставим произвольной точке $p \in X$ окрестность $U \subset X$, над которой существует базисный набор сечений $\{s_i(p)|i = 1, \dots, r\}$ расслоения π (аксиома 2' π). Тогда $\{s_i^*(p)|i = 1, \dots, r\}$ образуют базисный набор сечений расслоения π^* над U.

Таким образом, отображение $\pi^* : E^* \to X$ является локально тривиальным расслоением. Оно называется *расслоением, сопряженным к* $\pi : E \to X$. Сечения сопряженного расслоения — это гладкое по p семейство линейных функционалов $l_p : E_p \to \mathbb{R}$.

Задача 4.3. *Пусть $g_{\alpha\beta}$ функция перехода между локальными тривиализациями h_α и h_β расслоения $\pi : E \to X$. Пусть $g_{\alpha\beta}^*$ функция перехода между соответствующими локальными тривиализациями h_α^* и h_β^* сопряженного расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Докажите, что матрицы $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\beta\alpha}^*$ сопряжены. Докажите прямым вычислением, что матрицы $g_{\alpha\beta}^*$ удовлетворяют условиям леммы 4.1.*

Тензорное произведение расслоений.

Напомним, что базисы $\{s_i^t|i = 1, \dots, r^t\}$ векторных пространств V^t $(t = 1, \dots, n)$ порождают базис

$$\{s_{i^1}^1 \otimes \dots \otimes s_{i^n}^n | i^t = 1, \dots, r^t; t = 1, \dots, n\}$$

векторного пространства $V = V^1 \otimes \dots \otimes V^n$.

Определим тензорное произведение

$$\pi : E \to X,$$

расслоений

$$\pi^t : E^t \to X, \quad (t = 1, \dots, n).$$

Слои расслоения π определяются как тензорные произведения $E_p = E_p^1 \otimes \dots \otimes E_p^n$ слоев E_p^t расслоений π^t. Тотальное пространство имеет вид $E = \bigcup\limits_p E_p$. Соответствие $E_p \mapsto p$ задает проекцию $\pi : E \to X$.

Докажем, что π — локально тривиальное векторное расслоение. Переходя к пересечениям тривиализаций, можно считать, что каждая точка $p \in X$ имеет окрестность $U \subset X$, над которой существует базисное семейство сечений

$$\{s_i^t(p) | i = 1, \dots, r^t\}$$

расслоения π^t для каждого $i = 1, \dots, n$ (аксиома 2' для π^t). Но тогда

$$\{s_{i_1}^1(p) \otimes \dots \otimes s_{i_n}^n(p) | i_t = 1, \dots, r_t; t = 1, \dots, n\}$$

— это базисный набор сечений отображения $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$ и, следовательно, π удовлетворяет аксиоме 2'.

Таким образом, отображение $\pi : E \to X$ является локально тривиальным векторным расслоением. Оно называется *тензорным произведением расслоений* $\pi^1, \dots, \pi^n$ и обозначается $\pi = \pi^1 \otimes \dots \otimes \pi^n$.

Найдем переходные функции $g_{\alpha\beta}$ этого расслоения. Рассмотрим базисные наборы сечений $(s_\alpha^t)_{i^t}$ и $(s_\beta^t)_{j^t}$ $(i^t, j^t = 1, \dots, r^t)$ порожденный локальными тривиализациями $\pi_{U_\alpha}^t : (\pi^t)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ и $\pi_{U_\beta}^t : (\pi^t)^{-1}(U_\beta) \to U_\beta$ $(t = 1, \dots, n)$. Рассмотрим переходные функции $(g_{\alpha\beta}^t)_{j^t}^{i^t}$ и между этими локальными тривиализациями. Тогда

$$(s_\beta^t)_{j^t} = (g_{\alpha\beta}^t)_{j^t}^{i^t} (s_\alpha^t)_{i^t},$$

где $t = 1, \dots, n$; $i^t, j^t = 1, \dots, r^t$.

Следовательно,

$$(s_\beta^1)_{j^1} \otimes \dots \otimes (s_\beta^n)_{j^n} = (g_{\alpha\beta}^1)_{j^1}^{i^1} \dots (g_{\alpha\beta}^n)_{j^n}^{i^n} (s_\alpha^1)_{i^1} \otimes \dots \otimes (s_\alpha^n)_{i^n}.$$

Таким образом, нужная нам переходная функция имеет вид

$$(g_{\alpha\beta})_{j^1 \dots j^n}^{i^1 \dots i^n} = (g_{\alpha\beta}^1)_{j^1}^{i^1} \dots (g_{\alpha\beta}^n)_{j^n}^{i^n}.$$

Задача 4.4. *Докажите прямым вычислением, что функции перехода тензорного произведения расслоений удовлетворяют условиям леммы 4.1*

Тензорное умножение произвольных сечений $a_1^{i_t} s_{i^t}^t$ тривиализаций

$$h^t : (\pi^t)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{r^t}$$

определяется через тензорные произведения в слоях, то есть формулой

$$a_1^{i_1} s_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes a_n^{i_n} s_{i_n}^n = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} s_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes s_{i_n}^n \in \mathcal{F}_\pi(U).$$

Задача 4.5. *Докажите, что тензорное умножение сечений не зависит от выбора тривиализации и, следовательно, порождает гомоморфизм векторных пространств* $\mathcal{F}_{\pi_1}(X) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\pi_n}(X) \to \mathcal{F}_\pi(X)$.

Задача 4.6. *Определите прямые суммы расслоений и исследуйте их свойства.*

Особый интерес представляют тензорные степени расслоений $\pi^{\otimes n} = \pi \otimes \cdots \otimes \pi$ и пространств их сечений $\mathcal{F}_\pi^{\otimes n}(X)$. В этом случае $\pi^{\otimes n_1} \otimes \pi^{\otimes n_2} = \pi^{\otimes(n_1+n_2)}$ и

$$\mathcal{F}_\pi^{\otimes n_1}(X) \otimes \mathcal{F}_\pi^{\otimes n_2}(X) \to \mathcal{F}_\pi^{\otimes(n_1+n_2)}(X).$$

Задача 4.7. *Докажите, что операции $\oplus$ и $\otimes$ наделяют множество $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_\pi^{\otimes n}(X)$ структурой градуированной алгебры над кольцом гладких функций.*

4.4. **Внешние степени расслоений.** Напомним определение внешней степени $V^{\wedge n}$ векторного пространства V размерности r. Внешнее произведение векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ — это

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)},$$

где S_n группу перестановок чисел $\{1, \ldots, n\}$ и $|\sigma|$ — четность перестановки $\sigma \in S_n$. В частности,

$$v_{\chi(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\chi(n)} = (-1)^{|\chi|} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

для любой перестановки $\chi \in S_n$ и $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = 0$, если среди векторов $v_1, \ldots, v_n$ есть совпадающие.

Обозначим через $V^{\wedge n} \subset V^{\otimes n}$ векторное пространство, порожденное тензорами вида $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$. Его размерность $\dim V^{\wedge n}$ равна равна 0 при $n > r$ и $\frac{r!}{n!(r-n)!}$ при $n \leq r$.

Базис $\{e_i | i = 1, \ldots, r\}$ пространства V порождает базис

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} | i_1 < \cdots < i_n\}$$

пространства $V^{\wedge n}$. Замена базиса $\tilde{e}_j = g_j^i e_i$ приводит к замене базиса $V^{\wedge n}$

$$\tilde{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{j_n} = \hat{g}^{i_1 \ldots i_n}_{j_1 \ldots j_n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \quad (i_1 < \cdots < i_n;\, j_1 < \cdots < æ_n), \tag{2}$$

где $\hat{g}^{i_1 \ldots i_n}_{j_1 \ldots j_n} = \sum\limits_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_1}_{j_{\chi(1)}} \cdots g^{i_n}_{j_{\chi(n)}}$.

Задача 4.8. *Докажите, что пространство $(V^{\wedge n})^*$ естественно изоморфно пространству кососимметрических полилинейных форм на V. Докажите, что $(V^{\wedge n})^* = (V^*)^{\wedge n}$.*

Зададим внешнее произведение внешних произведений базисных векторов как

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \wedge (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}) = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}.$$

Продолжив его по линейности, получим внешнее произведение пространств $V^{\wedge n}$ и $V^{\wedge m}$ со значениями в $V^{\wedge(n+m)}$.

Задача 4.9. *Докажите, что внешнее произведение пространств $V^{\wedge n}$ и $V^{\wedge m}$ не зависит от выбора базиса в пространстве V. Докажите, что $\omega_n \wedge \omega_m = (-1)^{nm} \omega_m \wedge \omega_n$, если $\omega_n \in V^{\wedge n}$ и $\omega_m \in V^{\wedge m}$.*

Подрасслоением расслоения $\pi : E \to X$ называется совокупность векторных подпространств $\hat{E}_p \subset E_x$, $\hat{E} = \bigcup_{p\in X} \hat{E}_p$ такая, что $\pi|_{\hat{E}} : \hat{E} \to X$ — векторное расслоение.

Определим *внешнюю n-тую степень расслоения* $\pi : E \to X$ как подрасслоение

$$\pi^{\wedge n} : E^{\wedge n} \to X$$

его тензорной степени $\pi^{\otimes n} : E^{\otimes n} \to X$. Слоями расслоения $\pi^{\wedge n}$ являются векторные пространства $(E_p)^{\wedge n}$ и $E^{\wedge n} = \bigcup_{p\in X} (E_p)^{\wedge n}$.

Стандартный базис $\{e_1, \dots, e_r\}$ пространства $\mathbb{R}^r$ порождает набор базисных сечений $\{e_1, \dots, e_r\}$ над U тривиализации расслоения $\pi : E \to X$. Внешние произведения этих сечений $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} | i_1 < \dots < i_n\}$ образуют базисный набор сечений и, следовательно, тривиализацию расслоения $\pi^{\wedge n} : E^{\wedge n} \to X$ над U.

Согласно соотношению (2), переходные функции

$$\tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_n} = \hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

тривиализаций расслоения $\pi^{\wedge n}$ выражаются через переходные функции $\tilde{e}_j = g^i_j e_i$ тривиализаций расслоения π по формулам

$$\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} g^{i_1}_{j_{\sigma(1)}} \dots g^{i_n}_{j_{\sigma(n)}}. \tag{3}$$

Задача 4.10. *Докажите, что матричнозначные функции $\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n}$ удовлетворяют условиям леммы 4.1.*

Обозначим через $\mathcal{E}^{\wedge n}$ множество сечений расслоения $E^{\wedge n}$. Внешнее произведение пространств $(E_p)^{\wedge n}$ и $(E_p)^{\wedge m}$ порождают внешнее произведение $\omega_n \wedge \omega_m \in \mathcal{E}^{\wedge(n+m)}$ между сечениями $\omega_n \in \mathcal{E}^{\wedge n}$ и $\omega_m \in \mathcal{E}^{\wedge m}$.

5. Тензорные поля и дифференциальные формы

5.1. **Тензорные расслоения.** *Касательным расслоением* гладкого многообразия X называется локально тривиальное векторное расслоение

$$\pi : TX \to X,$$

слоем которого $(TX)_p$ над каждой точкой $p \in X$ является касательное пространство T_pX в этой точке, а локальные тривиализации строятся по локальным картам, используя схему описанную в разделе 2.3. Согласно этой схеме, локальная карта многообразия $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ порождает базисный набор сечений

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(i = 1, \dots, r)$$

над U и, следовательно, локальную тривиализацию. Напомним эту конструкцию.

Рассмотрим образ

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^r(p)) \in \mathbb{R}^r$$

точки $p \in U$ и проходящий через неё путь

$$x^i(t) = (x^1(p), \dots, x^{i-1}(p), t - x^i(p), x^{i+1}(p), \dots, x^r(p))$$

на $\varphi(U) \in \mathbb{R}^r$. Его прообраз $\gamma^i(t) = \varphi^{-1}(x^i(t))$ является путём на X с началом в p. Класс эквивалентности этого пути образует вектор касательного пространства, обозначаемый $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pX$.

Зависящее от $p \in U$ семейство векторов $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ образует сечение $\frac{\partial}{\partial x^i}(U)$ касательного расслоения над U. Согласно примеру 2.1, классы эквивалентности путей $\{x^i(t)|i = 1,\dots,r\}$ образуют базис касательного пространства $T_{x(p)}\mathbb{R}^r$. Образами этих векторов под действием дифференциала $d\varphi^{-1}_{x(p)}$ диффеоморфизма φ^{-1} как раз и являются вектора $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pX|i = 1,\dots,r\}$. Следовательно, они также образуют базис и, значит, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(U)|i = 1,\dots,r\}$ — базисный набор сечений над U.

Сопряженное к касательному расслоению $\pi : TX \to X$ расслоение

$$\pi^* : T^*X \to X,$$

называется *кокасательным.* Как мы уже видели, локальная карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ порождает базисный набор сечений $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(U)|i = 1,\dots,r\}$ над U. Двойственный ему набор сечений кокасательного расслоения обозначается $\{dx^i(U)|i = 1,\dots,r\}$. Другими словами, $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$.

Сечения векторных расслоений называются *векторными полями.* В локальной тривиализации, порожденной локальной картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1,\dots,x^r)\}$ векторными поля имеют вид $T^j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$. Закон изменения вида векторного поля при замене локальной карты с функцией перехода

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1,\dots,x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^r)$$

был найден в разделе 2.3. Там было доказано, что

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}} \tag{4}$$

и, следовательно,

$$T^j\frac{\partial}{\partial x^j} = \widetilde{T}^{\tilde{j}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{T}^{\tilde{j}} = T^j\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j}.$$

Сечения ковекторных расслоений называются *ковекторными полями.* В локальной тривиализации, порожденной локальной картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1,\dots,x^r)\}$ ковекторные поля имеют вид $T_i(p)dx^i(p)$.

Базис $\{dx^1,\dots,dx^r\}$ сопряжен базису $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^r}\}$. Поэтому, согласно задаче 4.3, соотношение (4) влечет $dx^i = A^i_{\tilde{i}}d\tilde{x}^{\tilde{i}}$, где $\{A^i_{\tilde{i}}\} = ((\{\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}{\partial x^i}\})^{-1})^* = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}$, то есть

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}d\tilde{x}^{\tilde{i}} \tag{5}$$

Таким образом,

$$T_i dx^i = \widetilde{T}_{\tilde{i}}d\tilde{x}^{\tilde{i}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{T^{\tilde{i}}} = T^j\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j}.$$

Тензорные произведения векторных и ковекторных расслоений

$$\pi^{\otimes m} \otimes (\pi^*)^{\otimes n} : (TX)^{\otimes m} \otimes (T^*X)^{\otimes n} \to X$$

называются *тензорными расслоениями типа* (m,n). Их сечения называются *тензорными полями типа* (m,n). В локальной тривиализации, порожденной локальной картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \dots, x^r)\}$ тензорные поля типа (m, n) имеют вид

$$T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n}.$$

Коэффициенты $T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_n}$ иногда называют *компонентами тензорного поля.*

Из соотношений (4) и (5) следует

Теорема 5.1. *При замене локальных карт с функцией перехода*

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r)$$

вид сечений меняется по правилу

$$T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n} =$$

$$\widetilde{T}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_m}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_m}} \otimes d\tilde{x}^{i_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{i_n},$$

где

$$\widetilde{T}^{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_m}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_m}}{\partial x^{j_m}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_1}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_n}}$$

5.2. **Дифференциальные формы.** В теории гладких многообразий особую роль играют внешние степени кокасательных расслоений $(T^*)^{\wedge n}$. Их сечения называются *дифференциальными формами степени* n или *дифференциальными* n*-формами.* Таким образом, в локальных тривиализациях, порожденных локальными картами, дифференциальные формы степени n имеют вид

$$T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \quad \text{где} \quad i_1 < \dots < i_n.$$

В частности $\mathcal{E}^n(X) = \emptyset$ при $n > r$.

Гладкие функции на X удобно считать дифференциальными формами степени 0. Дифференциальные формы степени n образуют модуль $\mathcal{E}^n(X) = \mathcal{F}_{(\pi^*)^{\wedge n}}(X)$ над кольцом гладких функций $\mathcal{F}(X) = \mathcal{E}^0(X)$.

Закон преобразования компонент дифференциальной формы следует из формул (3) и (5).

Теорема 5.2. *При замене локальных карт с функцией перехода*

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r)$$

вид дифференциальной формы преобразуется по правилу

$$T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \tilde{T}_{i_1 \dots i_n} d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_n},$$

где

$$\tilde{T}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = \sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_{\chi(1)}}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_{\chi(n)}}} T_{i_1 \dots i_n}.$$

Особенно важен случай форм максимальной степени $n = r$. Пространство таких дифференциальной форм одномерно и порождается *формой объёма* $x^1 \wedge \dots \wedge x^r$. Теорема 5.2 влечет

Следствие 5.1. *При замене локальных карт с функцией перехода*

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r)$$

вид формы объёма преобразуется по правилу

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r = \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^r.$$

На дифференциальных формах действует линейный оператор

$$d : \mathcal{E}^n(X) \to \mathcal{E}^{n+1}(X).$$

На гладких функциях $f \in \mathcal{E}^0(X)$ представленных в локальной карте $(x^1, \dots, x^r)$ он действует по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \in \mathcal{E}^1(X).$$

При замене локальной карты $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r)$ дифференциальная форма $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ представляется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j\Big) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\Big) d\tilde{x}^j = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j.$$

Таким образом, определение формы df не зависит, от выбора локальной карты.

Определим теперь оператор $d : \mathcal{E}^n(X) \to \mathcal{E}^{n+1}(X)$ в локальной карте формулой

$$d(T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = d(T_{i_1 \dots i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

Теорема 5.3. *Оператор d линеен, причем $d^2 = 0$. Если $\omega_k \in \mathcal{E}^k(X)$ и $\omega_l \in \mathcal{E}^l(X)$, то $d(\omega_k \wedge \omega_l) = d\omega_k \wedge \omega_l + (-1)^k \omega_k \wedge d\omega_l$.*

Proof. Линейность оператора d на функциях следует из линейности частных производных.

$$d(\lambda f_1 + f_2) = \frac{\partial(\lambda f_1 + f_2)}{\partial x^i} dx^i = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f_2}{\partial x^i} dx^i = \lambda df_1 + df_2.$$

Отсюда следует линейность оператора d на произвольных дифференциальных формах

$$\begin{gathered} d(\lambda T^1_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} + T^2_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = \\ d((\lambda T^1_{i_1 \dots i_n} + T^2_{i_1 \dots i_n}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = \\ d(\lambda T^1_{i_1 \dots i_n} + T^2_{i_1 \dots i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \\ \lambda d(T^1_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) + d(T^2_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}). \end{gathered}$$

Докажем $d^2 = 0$ для функций. В этом случае

$$d^2 f = d(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0,$$

поскольку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ и $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$. По тем же причинам, для дифференциальных форм произвольной степени

$$d^2(T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = d(\frac{\partial T_{i_1 \dots i_n}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) =$$

$$\frac{\partial^2 T_{i_1 \dots i_n}}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = 0.$$

Последнее утверждение основано на правиле Лейбница для функций

$$d(f_1 f_2) = \frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial x^i} \wedge dx^i = (\frac{\partial f_1}{\partial x^i} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x^i}) \wedge dx^i = df_1 f_2 + f_1 df_2.$$

Действительно,

$$d(T^1_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge T^2_{j_1\ldots j_l} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) =$$

$$d(T^1_{i_1\ldots i_k} T^2_{j_1\ldots j_l}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

$$= (d(T^1_{i_1\ldots i_k}) T^2_{j_1\ldots j_l} + T^1_{i_1\ldots i_k} dT^2_{j_1\ldots j_l}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} =$$

$$(d(T^1_{i_1\ldots i_k}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (T^2_{j_1\ldots j_l} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) +$$

$$(-1)^k (T^1_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (d(T^2_{j_1\ldots j_l}) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}).$$

□

Теорема 5.4. *Оператор d не меняется при замене локальной карты.*

Proof. Для $n = 0$ это утверждение мы уже доказали. Докажем его для $n = 1$. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = T_i dx^i$. При замене локальных карт с функцией перехода

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \ldots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^r)$$

дифференциальная форма принимает вид

$$\omega = (T_i \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}) d\tilde{x}^j.$$

Применяя оператор d в новом базисе находим, применяя теорему 5.3,

$$d\omega = d(T_i \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}) \wedge d\tilde{x}^j = d(T_i) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \wedge d\tilde{x}^j + T_i d(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}) \wedge d\tilde{x}^j.$$

Но

$$d(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}) \wedge d\tilde{x}^j = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^j = 0,$$

в виду $d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^j = -d\tilde{x}^j \wedge d\tilde{x}^k$. Таким образом,

$$d\omega = d(T_i \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}) \wedge d\tilde{x}^j = d(T_i) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \wedge d\tilde{x}^j = d(T_i) \wedge dx^i.$$

При $n > 1$ доказательство по существу такое же, но более громоздкое. Мы оставляем его в качестве не обязательного упражнения. □

5.3. **Интегрирование дифференциальных форм.** Гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ гладкого многообразия M назовем *ориентирующим*, если положительны все определители якобианов переходных функций. Многообразие, допускающее ориентирующий атлас, назовем *ориентируемым.*

Два ориентирующих атласа назовем *эквивалентными*, если их объединение также является ориентирующим атласом. Класс эквивалентности ориентирующих атласов называется *ориентацией многообразия.*

Задача 5.1. *Докажите, что всякое связное ориентируемое многообразие имеет ровно 2 ориентации.*

Гладкое многообразие с выбранной ориентацией называется *ориентированным.* В этом случае атлас, предсавляющий ориентацию назовем *ориентирующим.* Карту ориентированного многообразия назовем *допустимой*, если ее можно включить в ориентирующий атлас.

Рассмотрим гладкую дифференциальную форму $\omega \in \mathcal{E}^r(U)$ на связной односвязной области $U \subset M$ ориентированного гладкого многообразия M размерности r. Пусть (U, φ) — допустимая карта. В этой карте дифференциальная форма степени n имеет вид $\omega = f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$, где f — гладкая функция. Определим интеграл от ω равенством

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U f(x)dx^1 \dots dx^r.$$

Докажем, что это определение не зависит от отображения φ.

Действительно, рассмотрим другую допустимую карту $(U, \tilde{\varphi})$ с функцией перехода $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r)$. В этой карте, согласно следствию 5.1, форма имеет вид

$$\omega = f(\tilde{x}) \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^r.$$

Таким образом, наше определение, примененное к карте $(U, \tilde{\varphi})$, дает

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U f(\tilde{x}) \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^r$$

.

Теперь корректность определения интеграла $\int\limits_U \omega$ следует из формулы многомерного анализа о замене переменных в интеграле ,

$$\int\limits_U f(x)dx^1 \dots dx^r = \int\limits_U f(\tilde{x}) \Big| \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} \Big| d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^r = \int\limits_U f(\tilde{x}) \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^r.$$

Распространим определение интеграла на компактные ориентированные многообразия. Рассмотрим ориентирующий конечный атлас $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ ориентированного многообразия M.

Набор гладких функций $\{\psi_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ на M называется *разбиением единицы, подчиненным атласу* $\mathcal{U}$, если $\mathtt{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$, $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ и $\sum\limits_{\alpha \in \Sigma} \psi_\alpha(x) = 1$. (Как обычно, через $\mathtt{supp}(f)$ обозначается носитель функции f, то есть замыкание $\overline{\{x \in U_\alpha | f(x) \neq 0\}}$.)

Лемма 5.1. *На компактном многообразии M разбиение единицы существует.*

Proof. Рассмотрим открытое покрытие $\{V_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$, вписанное в покрытие $\{U_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$, то есть такое, что $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ и $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha = M$. Тогда, согласно задачи 3.5, для каждого $\alpha \in \Sigma$ существует гладкая функция $f_\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, равная 1 на $\varphi_\alpha(V_\alpha)$ и 0 вне $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Положим $f = \sum\limits_{\alpha \in \Sigma} f_\alpha \varphi_\alpha$ и $\psi_\alpha = \frac{f_\alpha \varphi_\alpha}{f}$. □

Используя конечный ориентирующий атлас $\mathcal{U}$ и подчиненное ему разбиение единицы $\{\psi_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$, определим интеграл по всему многообразию M как

$$\int\limits_M \omega = \sum_{\alpha\in\Sigma} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega.$$

Лемма 5.2. *Определение интеграла не зависит от разбиения единицы* $\{\psi_\alpha|\alpha \in \Sigma\}$, *подчиненного конечному ориентирующему атласу* $\mathcal{U}$.

Proof. Обозначим через N мощность $|\Sigma|$ множества Σ. Тогда можно считать, что $\Sigma = \{1, \ldots, N\}$. Пусть $\{\psi^1_\alpha|\alpha \in \Sigma\}$ и $\{\psi^2_\alpha|\alpha \in \Sigma\}$ — разбиения единицы, подчиненные атласу $\mathcal{U}$. Рассмотрим "разбиение нуля" $\psi_\alpha = \psi^1_\alpha - \psi^2_\alpha$. Нам надо доказать, что $\sum\limits_{\alpha\in\Sigma} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha\omega = 0$. Для этого достаточно доказать, что для любого набора функций $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ со свойствами $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha = 0$, $\mathtt{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$ выполнено

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha\omega = 0.$$

Это утверждение мы будем доказывать индукцией по N. Для $N = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для любого набора, состоящего из $N - 1$ функций. По условию, $\mathtt{supp}(\psi_N) \subset U_N$. Поэтом, согласно задачи 3.5, существует гладкая функция χ такая, что $\chi(\mathtt{supp}(\psi_N)) = 1$ и $\mathtt{supp}(\chi) \subset U_N$. Функция $\chi\psi_N$ равна ψ_N в точках, где ψ_N не равна 0 и равна 0 в точках, где ψ_N равна 0. Таким образом, $\chi\psi_N = \psi_N$.

В частности

$$\psi_N = \chi\psi_N = \chi(-\sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha) = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \chi\psi_\alpha, \quad \text{причем} \quad \mathtt{supp}(\chi\psi_\alpha) \subset U_N \cap U_\alpha.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha\omega = \int\limits_{U_N} \psi_N\omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha\omega = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_N} \chi\psi_\alpha\omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha\omega =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} (\psi_\alpha - \chi\psi_\alpha)\omega = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \tilde{\psi}_\alpha\omega, \quad \text{где} \quad \tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha - \chi\psi_\alpha.$$

С другой стороны

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \tilde{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \chi\psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha + \chi\psi_N = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha + \psi_N = 0.$$

Применяя предположение индукции к набору функций $\{\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_{N-1}\}$, находим, что

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha\omega = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \tilde{\psi}_\alpha\omega = 0.$$

□

Теорема 5.5. *Определение интеграла на ориентированном гладком многообразии не зависит от выбора ориентирующего атласа.*

Proof. Рассмотрим 2 ориентирующих атласа $\mathcal{U}^1 = \{(U^1_{\alpha^1}, \varphi^1_{\alpha^1}) | \alpha^1 \in \Sigma^1\}$ и $\mathcal{U}^2 = \{(U^2_{\alpha^2}, \varphi^2_{\alpha^2}) | \alpha^2 \in \Sigma^2\}$ на ориентированном многообразии M. Их объединение $\mathcal{U} = \mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2$ тоже является ориентирующим атласом.

Рассмотрим согласованное с атласом $\mathcal{U}^1$ разбиение единицы ψ^1_α и продолжим его до разбиения единицы согласованного с атласом $\mathcal{U}$, считая, что функции, отвечающие картам атласа, $\mathcal{U}^2$ нулевые. Построенное разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{U}$, дает то же значение интеграла, что и разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{U}^1$. Таким образом, согласно лемме 5.2 интеграл, построенный по атласу $\mathcal{U}^1$, совпадает с интегралом, построенным по атласу $\mathcal{U}$. Аналогично доказывается, что интеграл, построенный по атласу $\mathcal{U}^2$, совпадает с интегралом, построенным по атласу $\mathcal{U}$. □

Задача 5.1. *Докажите, что интеграл является линейным функционалом на пространстве дифференциальных форм. То есть*

$$\int\limits_M (\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda \int\limits_M \omega_1 + \int\limits_M \omega_2.$$

6. Формула Стокса

6.1. **Многообразия с краем.** *Топологическим многообразием с краем* называется сепарабельное хаусдорфово топологическое пространство M, что для всякой его точки существует окрестность, гомеоморфная или пространству $\mathbb{R}^r$ (такие точки называются *внутренними*), или полупространству $\mathbb{R}^r_- = \{x \in \mathbb{R}^r | x^1 \le 0\}$ (такие точки называются *граничными*). Множество граничных точек обозначается ∂M.

Внутренней картой многообразия с краем M называется пара (U, φ), где $U \subset M \setminus \partial M$ — открытое подмножество и $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ — гомеоморфизм на подмножество $\varphi(U)$.

Граничной картой многообразия с краем M называется пара (U, φ), где $U \cap \partial M \neq \emptyset$, $U \setminus \partial M$ открытое подмножество в $M \setminus \partial M$ и $\varphi : U \to \mathbb{R}^r_-$ — гомеоморфизм на подмножество $\varphi(U)$ такой, что $\varphi(U \cap \partial M)$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^r_0 = \{x \in \mathbb{R}^r | x^1 = 0\}$.

Совокупность покрывающих M внутренних и граничных карт называется *гладким атласом*, если все отображения перехода гладкие. Гладкость отображений перехода в окрестности внутренней точки определяется также как и для многообразий без границы.

Для того, чтобы определить гладкие отображения перехода в окрестности граничной точки надо указать, какие отображения $F : X \to Y$ областей с границей $X, Y \subset \mathbb{R}^r_-$ мы считаем диффеоморфизмами. По определению — это тоже гомеоморфизмы, у которых существуют частные производные всех порядков. В граничной точке производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ определяются стандартным образом для $i > 1$, а производная $\frac{\partial F}{\partial x^1}$ считается односторонней. То есть

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}(0, x^2, \dots, x^r) = \lim_{x^1 \to -0} \frac{F(x^1, x^2, \dots, x^r) - F(0, x^2, \dots, x^r)}{x^1}.$$

Лемма 6.1. *В граничной точке* $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0, x^2, \dots, x^r) > 0$ *и* $\frac{\partial F^1}{\partial x^i}(0, x^2, \dots, x^r) = 0$ *при* $i > 1$.

Proof. Значение первой компоненты отображений перехода $F^1(x^1, x^2, \ldots, x^r)$ отрицательно при $x^1 < 0$ и равно 0 при $x^1 = 0$. Следовательно, $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^r) > 0$ и $\frac{\partial F^1}{\partial x^i}(0, x^2, \ldots, x^r) = 0$ при $i > 1$. $\square$

Гладкие атласы называются эквивалентными, если их объединение тоже гладкий атлас. Класс эквивалентности гладких атласов называется гладкой структурой, а многообразие с гладкой структурой называется гладким многообразием с границей (краем).

Зададим на подпространстве $\mathbb{R}^r_0 = \{(0, x^2, \ldots, x^r)\}$ диффеоморфизм $h : \mathbb{R}^r_0 \to \mathbb{R}^{r-1}$, где $h(0, x^2, \ldots, x^r) = (x^2, \ldots, x^r)$. Рассмотрим гладкий атлас $\mathcal{U}$ многообразия M. Содержащая граничные точки локальная карта $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ переводит часть границы $\partial U = \partial M \cap U$ в точки вида $(0, x^2, \ldots, x^r) \subset \mathbb{R}^r$. Отображение $\tilde{\varphi} = h\varphi|_{\partial U}$ переводит ∂U в $\mathbb{R}^{r-1}$. Пары $(\partial U, \tilde{\varphi})$ образуют, таким образом, гладкий атлас $\partial\mathcal{U}$ границы ∂M. Этот атлас превращает границу ∂M в гладкое многообразие.

Как и для многообразий без границы, гладкий атлас называется ориентирующим, если положительны все определители якобианов переходных функций. Как и раньше класс эквивалентности ориентирующих атласов называется ориентацией многообразия. Далее мы считаем, что многообразие M ориентировано.

Лемма 6.2. *Пусть $\mathcal{U}$ ориентирующий атлас многообразия с краем M. Тогда гладкий атлас $\partial\mathcal{U}$ многообразия ∂M тоже ориентирующий. Ориентация границы ∂M, которую он порождает, называется ориентацией, индуцированной ориентацией многообразия M.*

Proof. Рассмотрим локальные карты атласа (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), содержащие граничную точку $p \in \partial M$. Тогда $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}_-$ и $\varphi_i(p) = (0, x_i^2, \ldots, x_i^r)$. Согласно лемме 6.1, якобиан отображения перехода между картами $F = \varphi_2\varphi_1^{-1}$ в точке $q = \varphi_1(p)$ имеет вид

$$dF(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(q) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F^2}{\partial x^1}(q) & \frac{\partial F^2}{\partial x^2}(q) & \ldots & \frac{\partial F^2}{\partial x^r}(q) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial F^r}{\partial x^1}(q) & \frac{\partial F^r}{\partial x^r}(q) & \ldots & \frac{\partial F^r}{\partial x^r}(q) \end{pmatrix},$$

где $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(q) > 0$, поскольку как координата $x^1(q)$, так и координата $F^1(q)$ уменьшаются при перемещении точки q от границы внутрь многообразия.

Согласно законам линейной алгебры, определитель матрицы $dF(q)$ равен произведению $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(q)$ на определитель матрицы

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^2}{\partial x^2}(q) & \ldots & \frac{\partial F^2}{\partial x^r}(q) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial F^r}{\partial x^2}(q) & \ldots & \frac{\partial F^r}{\partial x^r}(q) \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $dF(q)$ положительный, поскольку атлас $\mathcal{U}$ ориентирующий. Следовательно, положительный и определитель матрицы $\Delta(q)$. Эта матрица, с другой стороны, является матрицей Якоби для отображения перехода $\tilde{F} = \tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1^{-1}$ между картами $(\partial U_1, \tilde{\varphi}_1)$ и $(\partial U_2, \tilde{\varphi}_2)$ атласа $\partial\mathcal{U}$. Мы доказали, таким образом, что определители матриц Якоби функций перехода атласа $\partial\mathcal{U}$ положительны. А это и означает, что атлас $\partial\mathcal{U}$ на ∂M ориентирующий. $\square$

Говоря об ориентированном многообразии с границей, мы всегда будем подразумевать, что его граница наделена индуцированной ориентацией.

В наши определения векторных расслоений и операций над ними на многообразий без границы мы считали, что окрестности точек состоят из открытых множеств. Вся эта теория, однако, без изменений переносятся на гладкие многообразия с границей, где окрестности точек определены так как в начале этого раздела.

Определение касательного пространства для внутренних точек также не меняется. Для граничных точек p мы определяем касательное пространство T_p, как векторное пространство с базисом $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Для $i > 1$ базисные векторы $\frac{\partial}{\partial x^i}$ определяются так же, как для многообразий без границы. Вектор $\frac{\partial}{\partial x^1} \in T_p$ в определяется с помощью граничной локальной карты (U, φ), где $\varphi(p) = 0$, как класс эквивалентности пути $\varphi^{-1}\big((tx^1, 0, \dots, 0)\big)$, где $t \in [0, -\varepsilon]$. Тензоры и дифференциальные формы, как и раньше, определяются как сечения тензорных и внешних степеней касательных и кокасательных расслоений.

Задача 6.1. *Дать определение дифференцирования и интегрирования дифференциальных форм на многообразия с краем.*

Согласно нашим определениям, край ∂M многообразия с краем M также является гладким многообразием. Его карты $(\partial U, \tilde{\varphi})$ строятся из граничных карт (U, φ) многообразия M с помощью ограничений $\partial U = \partial M \cap U$, $\tilde{\varphi} = h\varphi|_{\partial U}$. Ограничение на ∂M дифференциальной формы на M является линейным функционалом на касательных векторах к ∂M, следовательно, порождает дифференциальную форму на ∂M.

Опишем эту конструкцию в терминах локальной карты. Рассмотрим базис $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 1, \dots, r\} \in T_p(M)$ касательного пространства к M в точке $p \in \partial M$. Его подмножество $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 2, \dots, r\}$ образует базис касательного пространства $T_p(\partial M)$ к ∂M.

Сопряженный базис кокасательных векторов $\{dx^i | i = 1, \dots, r\} \in T_p^*(M)$ для M порождает кокасательные вектора $\{dx^i | i = 1, \dots, r\} \in T_p^*(\partial M)$ для ∂M. Более того $dx^1 = 0$, как кокасательный вектор к ∂M, поскольку $dx^1(\frac{\partial}{\partial x^i}) = 0$ при $i > 1$. Кокасательные вектора $\{dx^i | i = 2, \dots, r\} \in T_p^*(\partial M)$ образуют базис, сопряженный к $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 2, \dots, r\} \in T_p(\partial M)$, поскольку $dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_{ij}$ при $i, j > 1$.

Таким образом, дифференциальная форма $\omega = A_{i_1,\dots,i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ на M порождает дифференциальную форму $\tilde{\omega} = \widetilde{A}_{i_1,\dots,i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ на многообразии ∂M, где $\widetilde{A}_{i_1,\dots,i_n} = 0$, если хотя бы одно из i_j равно 1, и $\widetilde{A}_{i_1,\dots,i_n} = A_{i_1,\dots,i_n}$ в остальных случаях.

Задача 6.2. *Доказать форма $\tilde{\omega}$ определена корректно, то есть не зависит от выбора граничной локальной карты.*

6.2. **Общая формула Стокса.**

Теорема 6.1. *(Общая формула Стокса) Рассмотрим дифференциальную форму ω степени $r - 1$ на гладком ориентированном многообразии M размерности r с* *границей. Тогда*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{6}$$

Proof. Рассмотрим ориентирующий атлас $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha\in\Sigma} U_\alpha$ многообразия M и, подчиненное атласу $\mathcal{U}$ разбиение единицы $\{\psi_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$. Тогда $\omega = \sum_{\alpha\in\Sigma} \omega_\alpha$, где $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$. Правая и левая часть формулы Стокса линейны относительно формы ω (задача 5.1). Следовательно, нам достаточно доказать, что

$$\int_M d\omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega_\alpha, \quad \text{то есть} \quad \int_{U_\alpha} d\omega_\alpha = \int_{U_\alpha \cap \partial M} \omega_\alpha,$$

поскольку носитель формы ω_α лежит в одной карте U_α. В рамках оной карты форма ω_α равна сумме форм вида

$$\omega_k = f(x^1, \dots, x^r) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^r,$$

где f равна 0 вне U_α.

Таким образом, в виду свойства линейности , нам достаточно доказать соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^r_-} d\omega_k = \int_{\partial\mathbb{R}^r_-} \omega_k \tag{7}$$

для всех k.

Как мы уже отмечали, дифференциал dx^1 порождает нулевой дифференциал на $\partial\mathbb{R}^r_-$. Таким образом, ограничение дифференциала ω_k на $\partial\mathbb{R}^r_-$ равно 0 при $k > 1$. Следовательно, правя часть формулы (7) равно 0 при $k > 1$. Найдем ее левую часть.

$$\int_{\mathbb{R}^r_-} d\omega_k = \int_{\mathbb{R}^r_-} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^r = (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}^r_-} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Интегрируя функцию $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ по переменной x^k, находим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f(x^1, \dots, x^r)\Big|_{x^k=-\infty}^{x^k=+\infty} = 0,$$

поскольку f равна 0 вне U_α. Теперь, переходя к повторному интегралу по остальным переменным, находим, что

$$\int_{\mathbb{R}^r_-} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r = 0.$$

Осталось разобрать случай $\omega_1 = f(x^1, \dots, x^r) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r$. В этом случае

$$d\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$$

и, следовательно,
$$\int\limits_{\mathbb{R}^r_-} d\omega_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^r_-} \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$
Интегрируя функцию $\frac{\partial f}{\partial x^1}$ по переменной x^1, находим, что
$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 = f(x^1, \dots, x^r)\Big|_{x^1=-\infty}^{x^1=0} = f(0, x^2 \dots, x^r).$$
Переходя к повторному интегралу, находим, что
$$\int\limits_{\mathbb{R}^r_-} d\omega_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} f(0, x^2, \dots, x^r) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^r_-} \omega_1.$$
□

Разбивая компактное многообразие без границы на 2 многообразия с границей и применяя теорему Стокса нходим

Следствие 6.1. *Интеграл* $\int\limits_M \omega$ *от точной формы* $\omega = d\eta$ *по компактному многообразию без границы* M *равен 0.*

6.3. **Формулы Грина, Гаусса-Остроградского и классическая формула Стокса.** Посмотрим, что означает общая формула Стокса в простейших ситуациях, когда $M \subset \mathbb{R}^n$ и $n = 1, 2, 3$. Эти формулы появились в математическом анализе значительно раньше общей формулы Стокса и позволили ее найти.

Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть $n = 1$. Тогда M — это отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ориентированный по возрастанию чисел. Граница состоит из точек a, b. Ориентацией точки назовем знак, который мы ей присваиваем. Этот знак положительный, если направление от точки границы во внешность отрезка совпадает с ориентацией отрезка, и отрицательный в противном случае. Таким образом, b — положительная точка, а a — отрицательная.

Дифференциальная форма ω степени 0 — это гладкая функция f. Таким образом, общая формула Стокса при $n = 1$ принимает вид
$$\int\limits_a^b df = f(b) - f(a),$$
то есть формулы Ньютона-Лейбница.

Формула Грина.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная гладкой кривой компактная область на плоскости и $\omega = A(x^1, x^2)dx^1 + B(x^1, x^2)dx^2$ — гладкая дифференциальная форма степени 1. Стандартная ориентация плоскости $\mathbb{R}^2$ порождает ориентацию области M. Кроме того,
$$d\omega = \Big(\frac{\partial A}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial A}{\partial x^2}dx^2\Big) \wedge dx^1 + \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial B}{\partial x^2}dx^2\Big) \wedge dx^2 = \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big)dx^1 \wedge dx^2.$$

Применяя общую формулу Стокса, находим, что

$$\int\limits_{\partial M} \Big(Adx^1 + Bdx^2\Big) = \int\limits_{M} \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2.$$

Эта формула называется формулой Грина.

Формула Гаусса-Остроградского.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная гладкой поверхностью компактная область в пространстве и $\omega = A(x^1, x^2, x^3)dx^1 \wedge dx^2 + B(x^1, x^2, x^3)dx^2 \wedge dx^3 + C(x^1, x^2, x^3)dx^3 \wedge dx^1$ — гладкая дифференциальная форма степени 2. Стандартная ориентация пространства $\mathbb{R}^3$ порождает ориентацию области M. Кроме того,

$$d\omega = \Big(\frac{\partial A}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial A}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial A}{\partial x^3}dx^3\Big) \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial B}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial B}{\partial x^3}dx^3\Big) \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$\Big(\frac{\partial C}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial C}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial C}{\partial x^3}dx^3\Big) \wedge dx^3 \wedge dx^1 = \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{\partial C}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Применяя общую формулу Стокса, находим, что

$$\int\limits_{\partial M} \Big(Adx^1 \wedge dx^2 + Bdx^2 \wedge dx^3 + Cdx^3 \wedge dx^1\Big) =$$

$$\int\limits_{M} \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{\partial C}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Эта формула называется формулой Гаусса-Остроградского.

Классическая формула Стокса.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная гладкой кривой гладкая ориентированная компактная поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим гладкую дифференциальную форму степени 1 $\omega = A(x^1, x^2, x^3)dx^1 + B(x^1, x^2, x^3)dx^2 + C(x^1, x^2, x^3)dx^3$. Тогда

$$d\omega = \Big(\frac{\partial A}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial A}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial A}{\partial x^3}dx^3\Big) \wedge dx^1 + \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial B}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial B}{\partial x^3}dx^3\Big) \wedge dx^2 +$$

$$\Big(\frac{\partial C}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial C}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial C}{\partial x^3}dx^3\Big) \wedge dx^3 =$$

$$\Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 + \Big(\frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{\partial B}{\partial x^3}\Big) dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} - \frac{\partial C}{\partial x^1}\Big) dx^3 \wedge dx^1.$$

Применяя общую формулу Стокса, находим, что

$$\int\limits_{\partial M} \Big(Adx^1 + Bdx^2 + Cdx^3\Big) =$$

$$\int\limits_{M} \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 + \Big(\frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{\partial B}{\partial x^3}\Big) dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} - \frac{\partial C}{\partial x^1}\Big) dx^3 \wedge dx^1.$$

Именно эту формулу и нашел в середине 19 века известный английский физик и математик Стокс.

7. Когомологии де Рама

7.1. **Определение когомологий де Рама.** Когомологии де Рама строятся при помощи дифференциальных форм на многообразии. Напомним коротко свойства дифференциальных форм (раздел 5.2).

Дифференциальными формами степени n (или *дифференциальными* n*-формами*) на гладком многообразии M называются сечения n-той внешней степени кокасательного расслоения $(T^*)^{\wedge n}$. В локальной карте дифференциальные n-формы имеют вид

$$T_{i_1\dots i_n}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n},\quad \text{где}\quad i_1<\dots<i_n.$$

Гладкие функции на M удобно считать дифференциальными формами степени 0. Дифференциальные формы степени n образуют модуль $\mathcal{E}^n(M)$ над кольцом гладких функций $\mathcal{F}(M)=\mathcal{E}^0(M)$. В частности $\mathcal{E}^n(M)=\emptyset$ при $n>r$.

Прямая сумма пространств дифференциальных форм всех степеней образуют градуированную алгебру

$$\mathcal{E}(M)=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{E}^n(M).$$

с операцией внешнего произведения, сопоставляющей дифференциальным формам $\omega_n\in\mathcal{E}^n(M)$ и $\omega_m\in\mathcal{E}^m(M)$ форму

$$\omega_n\wedge\omega_m\in\mathcal{E}^{n+m}(M)$$

такую, что

$$\omega_n\wedge\omega_m=(-1)^{nm}\omega_m\wedge\omega_n.$$

На базисных векторах локальной карты внешнее умножение определяется как

$$(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n})\wedge(dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_m})=dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_m}.$$

Самым важным для нас будет линейный *оператор дифференцирования*

$$d:\mathcal{E}^n(M)\to\mathcal{E}^{n+1}(M).$$

В произвольной локальной карте он имеет вид

$$d(T_{i_1\dots i_n}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n})=d(T_{i_1\dots i_n})\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_n}.$$

Отсюда следует, что $d^2=0$.

Дифференцирование и внешнее умножение связаны соотношением

$$d(\omega_n\wedge\omega_m)=d\omega_n\wedge\omega_m+(-1)^n\omega_n\wedge d\omega_m,$$

где $\omega_n\in\mathcal{E}^n(M)$, $\omega_m\in\mathcal{E}^m(m)$.

Перейдем к определению *когомологий де Рама.*

Дифференциальные n-формы, принадлежащие ядру оператора $d:\mathcal{E}^n(M)\to\mathcal{E}^{n+1}(M)$, называются *замкнутыми формами* или *коциклами.* Они образуют вещественное векторное пространство

$$Z^n(M)=\{\omega\in\mathcal{E}^n(M)|d\omega=0\}.$$

Дифференциальные n-формы, принадлежащие образу оператора $d : \mathcal{E}^{n-1}(M) \to \mathcal{E}^n(M)$, называются *точными формами* или *кограницами*. Они образуют вещественное векторное пространство

$$B^n(M) = \{\omega = d\eta | \eta \in \mathcal{E}^{n-1}(M)\} \subset \mathcal{E}^n(M).$$

Дифференциальные формы, отличающиеся на кограницу, называются *когомологичными*.

Соотношение $d^2 = 0$ для последовательности

$$\mathcal{E}^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{n+1}(M)$$

означает, что $B^n(M) \subset Z^n(M)$. Факторпространство

$$H^n(M, \mathbb{R}) = Z^n(M)/B^n(M)$$

называется *пространством n-мерных когомологий де Рама.* Другими словами, элемент группы когомологий — это коцикл с точностью до кограницы.

Задача 7.1. *Докажите, что $H^n(M, \mathbb{R}) = 0$, если $n > \dim M$*

Размерности $\dim H^n(M, \mathbb{R})$ называются *n-мерными числами Бетти.*

Из определения очевидно, что числа Бетти являются инвариантами гладких многообразий. Можно доказать, что они одинаковы и у гомеоморфных многообразий, то есть являются топологическими инвариантами. Более того, они конечны для компактных многообразий.

Лемма 7.1. *0-мерное число Бетти гладкого многообразия M равно числу связных компонент многообразия.*

Proof. Пространство $Z^0(M)$ состоит из локально постоянных функций, а пространство $B^0(M)$ пусто по определению. $\square$

Задача 7.2. *Найдите когомологии точки p. Докажите, что $H^0(p, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и $H^n(p, \mathbb{R}) = 0$, при $n > 0$.*

Прямая сумма

$$H^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(M, \mathbb{R})$$

называется *полным пространством когомологий.*

Теорема 7.1. *Внешнее умножение дифференциальных форм порождает внешнее умножение на полном пространстве когомологий, превращая $H^*(M, \mathbb{R})$ в градуированную алгебру, где $H^n(M, \mathbb{R}) \wedge H^m(M, \mathbb{R}) \subset H^{n+m}(M, \mathbb{R})$. При этом $h_n \wedge h_m = (-1)^{nm} h_m \wedge h_n$, если $h_n \in H^n(M, \mathbb{R})$, $h_m \in H^m(M, \mathbb{R})$.*

Proof. Докажем, что умножение дифференциальных форм порождает умножение на полном пространстве гомологий. Если $a \in Z^n(M)$ и $b \in Z^m(M)$, то $da = db = 0$ и $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^n a \wedge db = 0$. Таким образом, внешнее произведение коциклов является коциклом $a \wedge b \in Z^{n+m}(M)$.

Докажем теперь, что замена коциклов a и b на когомологичные меняет $a \wedge b$ на когомологичный коцикл. Пусть $\tilde{a} \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ и $\tilde{b} \in \mathcal{E}^{m-1}(M)$. Если

$$c = (-1)^n a \wedge \tilde{b} + \tilde{a} \wedge b + \tilde{a} \wedge d\tilde{b},$$

то

$$dc = a \wedge d\tilde{b} + d\tilde{a} \wedge b + d\tilde{a} \wedge d\tilde{b}.$$

Следовательно,

$$(a + d\tilde{a}) \wedge (b + d\tilde{b}) = a \wedge b + a \wedge d\tilde{b} + d\tilde{a} \wedge b + d\tilde{a} \wedge d\tilde{b} = a \wedge b + dc.$$

Соотношение $h_n \wedge h_m = (-1)^{nm} h_m \wedge h_n$ следует из соответствующего соотношения для внешнего произведения дифференциальных форм a и b. □

Согласно теореме де Рама интегрирование дифференциальных форм порождает двойственность между когомологиями де Рама и *гомологиями*, определяемыми как классы эквивалентности подногообразий[4]. Тем не менее, когомологии несут больше важной информации о многообразии чем гомологии. Это связано с тем, что операция внешнего умножения когомологий не имеет простого аналога в гомологиях. Эта ситуация прекрасно иллюстрирует одну из главных идей математики 20 века: топологически свойства многообразий удобно исследовать с помощью тензорных полей на них, или, более обще, сечений векторных расслоений на многообразиях.

7.2. **Гладкие отображения и когомологии.** Гладкое отображение $f : M \to N$ порождает линейное отображение пространств гладких функций $f^* : \mathcal{E}^0(N) \to \mathcal{E}^0(M)$, которое сопоставляет функции $a : N \to \mathbb{R}$ функцию $f^*(a) = af$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \Big\downarrow g \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Согласно разделу 2.4 гладкое отображение $f : M \to N$ порождают также линейное отображение сечений касательных расслоений $df : TM \to TN$. Согласно нашим определениям линейные формы на сечениях касательного расслоения являются сечениями кокасательного расслоения, то есть 1-дифференциальными формами.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ & & \Big\downarrow \omega \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Отображение $df : TM \to TN$ порождает, таким образом, линейное отображение $f^* : \mathcal{E}^1(N) \to \mathcal{E}^1(M)$ формулой $f^*(\omega) = \omega(df)$.

Определим линейное отображение $f^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ векторных пространств дифференциальных форм произвольной степени, считая, что в локальных координатах оно удовлетворяет соотношению

$$f^*(a_{s_1 \ldots s_k} dy^{s_1} \wedge \cdots \wedge dy^{s_k}) = f^*(a_{s_1 \ldots s_k}) f^*(dy^{s_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy^{s_k}).$$

Задача 7.3. *Докажите, что оператор f^* не зависит от выбора локальных координат.*

Дифференциальная форма $f^*(\omega)$ называется *обратным образом формы ω* при отображении f.

Задача 7.4. *Рассмотрим подмногообразие M гладкого многообразия N и его тавтологическое вложение $f : M \to N$. Докажите, что обратный образ $f^*(\omega)$ дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ совпадает с ее ограничением $\omega|_M \in \mathcal{E}^k(M)$.*

[4]С.М.Натанзон "Введение в пучки, расслоения и классы Черна" МЦНМО, М., 2010, Теорема 7.2

Как мы уже знаем, на пространствах дифференциальных форм действует линейный оператор $d : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M)$

Лемма 7.2. *Линейные операторы d и f^* связаны соотношением $df^* = f^*d$.*

Proof. Утверждение описывает локальное свойство, поэтому его достаточно доказать для координатных окрестностей многообразий M и N. Другими словами, можно считать, что M и N наделены координатными системами $M \subset \mathbb{R}^m = \{x\}$, $N \subset \mathbb{R}^n = \{y\}$. В координатной форме отображение f имеет вид $y^s = f^s(x)\,(s = 1, \dots, n)$.

Докажем утверждение леммы для функций a (т.е. дифференциальных форм нулевой степени). Действительно, в этом случае

$$f^*(da) = f^*(\frac{\partial a}{\partial y^j}dy^j) = \frac{\partial a}{\partial y^j}f^*(dy^j) = \frac{\partial a}{\partial y^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i$$

и $f^*(a)(x) = a(f(x))$, откуда

$$d(f^*(a)) = d(a(y(x))) = \frac{\partial a}{\partial y^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i.$$

Используя утверждение леммы для функции $y^s = f^s(x)$, находим $f^*(dy^s) = d(f^s(x)) = \frac{\partial f^s}{\partial x^i}dx^i$, откуда

$$d(f^*(dy^s)) = d(\frac{\partial f^s}{\partial x^i}dx^i) = \frac{\partial^2 f^s}{\partial x^j \partial x^i}dx^j \wedge dx^i = 0.$$

Согласно правилу Лейбница для дифференциальных форм отсюда следует, что

$$d\Big(f^*(dy^{s_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{s_k})\Big) = 0$$

и

$$d\Big(f^*(a_{s_1\dots s_k}dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k})\Big) = d\Big(f^*(a_{s_1\dots s_k})f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k})\Big) =$$

$$d\Big(f^*(a_{s_1\dots s_k})\Big) \wedge f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}) + f^*(a_{s_1\dots s_k}) \wedge d\Big(f^*(dy^{s_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{s_k})\Big) =$$

$$df^*(a_{s_1\dots s_k}) \wedge f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}).$$

С другой стороны,

$$d\Big(a_{s_1\dots s_k}dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}\Big) = da_{s_1\dots s_k} \wedge dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}$$

откуда

$$f^*\Big(d\Big(a_{s_1\dots s_k}dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}\Big)\Big) = f^*(da_{s_1\dots s_k}) \wedge f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}) =$$

$$df^*(a_{s_1\dots s_k}) \wedge f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}).$$

□

Теорема 7.2. *Гладкое отображение $f : M \to N$ порождает гомоморфизм групп когомологий $f^* : H^k(N, \mathbb{R}) \to H^k(M, \mathbb{R})$.*

Proof. Как мы уже видели, гладкое отображение $f : M \to N$ порождают гомоморфизм пространств дифференциальных k-форм $f^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$. Согласно лемме 7.2, если $\omega \in Z^k(N)$, то $df^*(\omega) = f^*d(\omega) = 0$. Таким образом,

$$f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M).$$

Аналогично, если $\omega \in B^k(N)$, то $\omega = d\eta$, где $\eta \in \mathcal{E}^{k-1}(N)$. Поэтому $f^*(\omega) = f^*d\eta = d(f^*\eta)$, где $f^*\eta \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$. Таким образом,

$$f^*(B^k(N)) \subset B^k(M).$$

Следовательно, гомоморфизм векторных пространств $f^* : \mathcal{E}^k(N) \to \mathcal{E}^k(M)$ порождает гомоморфизм векторных пространств $f^* : Z^k(N)/B^k(N) \to Z^k(M)/B^k(M)$, то есть

$$f^* : H^k(N, \mathbb{R}) \to H^k(M, \mathbb{R}).$$

□

Задача 7.5. *Докажите, что это отображение $f^* : H^k(N, \mathbb{R}) \to H^k(M, \mathbb{R})$ является гомоморфизмом градуированных колец когомологий. То есть переводит внешнее произведение когомологий во внешнее произведение их образов.*

Задача 7.6. *Рассмотрим гладкие отображения $f : M \to N$ и $g : N \to K$. Докажите, что порожденные ими гомоморфизмы когомологий удовлетворяют соотношению $(gf)^* = f^*g^*$.*

Таким образом, когомологии де Рама образуют контравариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию градуированных алгебр.

7.3. **Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама.** Два гладких отображения гладких многообразий $f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ называются *гладко гомотопными*, если существует гладкое отображение $F : M \times [0, 1] \to N$ (называемое *гомотопией*) такое, что $F(x, 0) = f_0$ и $F(x, 1) = f_1$. В этом разделе мы докажем, что гладко гомотопные отображения порождают одинаковые гомоморфизмы пространств когомологий.

Сначала мы изучим как связаны между собой дифференциальные формы на многообразиях M и $M \times [0, 1]$.

Задача 7.7. *Докажите что каждая форма*

$$\Omega \in \mathcal{E}^n(M \times [0, 1])$$

разлагается в сумму

$$\Omega = \omega_{n-1}(t) \wedge dt + \omega_n(t),$$

где t — координата на $[0, 1]$ и $\omega_{n-1}(t) \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$, $\omega_n(t) \in \mathcal{E}^n(M)$ при каждом $t \in [0, 1]$. В локальной карте эти дифференциальные формы имеют вид

$$\omega_{n-1} = a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}; \quad \omega_n = b_{i_1 \dots i_n}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

(здесь и в дальнейшем суммирование происходит по индексам $i_1 < \dots < i_n$.)

Положим

$$D\Omega = \int_0^1 \omega_{n-1} dt = \Big(\int_0^1 a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x, t) dt \Big) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

(Обратите внимание, что дифференциальная форма $D\Omega$ зависит только от ω_{n-1}.) Через $\Gamma_c \in \mathcal{E}^n(M)$ будет обозначаться ограничение формы $\Gamma \in \mathcal{E}^n(M \times [0,1])$ (например Ω или ω_n) на подмножество $M_c = M \times c \subset M \times [0,1]$.

Задача 7.8. *Докажите, что соответствие $\Omega \mapsto D\Omega$ порождает гомоморфизм векторных пространств $D : \mathcal{E}^n(M \times [0,1]) \to \mathcal{E}^{n-1}(M)$.*

Лемма 7.3. *Пусть $\Omega \in \mathcal{E}^n(M \times [0,1])$. Тогда $Dd\Omega - dD\Omega = (-1)^n\Big(\Omega_1 - \Omega_2\Big)$.*

Proof. Согласно нашим определениям, $\Omega = \omega_{n-1} \wedge dt + \omega_n$ и

$$dD\Omega = d\Big(\int\limits_0^1 a_{i_1\dots i_{n-1}}(x,t)dt\Big)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{n-1}} = \Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial a_{i_1\dots i_{n-1}}(x,t)}{\partial x^i}dt\Big)dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{n-1}}.$$

С другой стороны,

$$D(d\omega_{n-1} \wedge dt) = D\Big(\frac{\partial a_{i_1\dots i_{n-1}}(x,t)}{\partial x^i}dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}} \wedge dt\Big) =$$

$$\Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial a_{i_1\dots i_{n-1}}(x,t)}{\partial x^i}dt\Big)dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

Следовательно, $D(d\omega_{n-1} \wedge dt) = dD\Omega$.

Таким образом,

$$Dd\Omega - dD\Omega = Dd(\omega_{n-1} \wedge dt + \omega_n) - dD\Omega = D(d\omega_{n-1} \wedge dt + d\omega_n) - dD\Omega =$$

$$= Dd\omega_n = D\Big(\frac{\partial b_{i_1\dots i_n}}{\partial x^i}dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} + \frac{\partial b_{i_1\dots i_n}}{\partial t}dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}\Big) =$$

$$= (-1)^n D\Big(\frac{\partial b_{i_1\dots i_n}}{\partial t}dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \wedge dt\Big) = (-1)^n\Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial b_{i_1\dots i_n}}{\partial t}(x,t)dt\Big)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} =$$

$$= (-1)^n\Big(b_{i_1\dots i_n}(x,1) - b_{i_1\dots i_n}(x,0)\Big)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = (-1)^n\Big((\omega_n)_1 - (\omega_n)_0\Big).$$

Касательное пространство к точкам множества M_c не содержит векторов $\frac{\partial}{\partial t}$. Поэтому дифференциальная форма dt равна 0 на M_c. Следовательно, равенство $\Omega = \omega_{n-1} \wedge dt + \omega_n$ влечет

$$(\omega_n)_1 - (\omega_n)_0 = (\Omega)_1 - (\Omega)_0.$$

□

Теорема 7.3. *Пусть гладкие отображения $f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ гладко гомотопны. Тогда порожденные ими отображения колец гомологий $f_0^* : H^*(N,\mathbb{R}) \to H^*(M,\mathbb{R})$ и $f_1^* : H^*(N,\mathbb{R}) \to H^*(M,\mathbb{R})$ совпадают.*

Proof. Пусть $F : M \times [0,1] \to N$ — гомотопия между отображениями f_0 и f_1. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega \in \mathcal{E}^n(N)$ и положим $\Omega = F^*\omega$. Тогда, согласно задаче 7.4, имеем $f_1^*(\omega) = \Omega_1$, $f_0^*(\omega) = \Omega_0$ и, согласно лемме 7.3, имеем

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = \Omega_1 - \Omega_0 = (-1)^n(Dd\Omega - dD\Omega) = (-1)^n(Dd(F^*\omega) - dD(F^*\omega)).$$

Пусть ω — замкнутая форма. Тогда, согласно лемме 7.2, $dF^*(\omega) = F^*d(\omega) = 0$ и значит

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (-1)^{n+1}dD(F^*\omega).$$

Таким образом, замкнутые формы $f_1^*(\omega)$ и $f_0^*(\omega)$ отличаются на точную форму и, следовательно, представляют один и тот же класс когомологий. $\square$

Гладкие многообразия M и N называются *гладко гомотопически эквивалентными*, если существуют гладкие отображения $f : M \to N$ и $g : N \to M$ такие, что отображения $gf : M \to M$ и $fg : N \to N$ гомотопны тождественным отображениям $1_M : M \to M$ и $1_N : N \to N$

Задача 7.9. *Докажите, что векторное пространство $\mathbb{R}^k$ и диск $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k | |x| < 1\}$ гладко гомотопически эквивалентны точке.*

Следствие 7.1. *Гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы когомологий.*

Proof. Рассмотрим отображения $f : M \to N$ и $g : N \to M$ реализующие гомотопическую эквивалентность многообразий M и N. Рассмотрим порожденные ими гомоморфизмы колец $f^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ и $g^* : H^*(M, \mathbb{R}) \to H^*(N, \mathbb{R})$.

Согласно задаче 7.6 и теореме 7.3, отображения $g^* f^* = (fg)^* = (1_M)^*$ и $f^* g^* = (gf)^* = (1_N)^*$ являются тождественными отображениями на себя колец $H^*(M, \mathbb{R})$ и $H^*(N, \mathbb{R})$. Таким образом, отображения g^* и f^* взаимно обратны и реализуют изоморфизм между кольцами $H^*(N, \mathbb{R})$ и $H^*(N, \mathbb{R})$. $\square$

Следствие 7.2. *(лемма Пуанкаре). Все замкнутые дифференциальные формы на диске D^k точны.*

Proof. Сопоставляя следствие 7.1 и задачи 7.2 7.9, находим, что $H^n(D^k, \mathbb{R}) = 0$ при $n > 0$. $\square$

7.4. **Точные последовательности.** Нам понадобится алгебраическая лемма, связанная с точными последовательностями. Этот раздел математики называется "гомологическая алгебра".

Говорят, что последовательность гомоморфизмов векторных пространств

$$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{l} C$$

точна в члене B, если $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$. Последовательность гомоморфизмов,

$$\cdots \to D_i \to D_{i+1} \to D_{i+2} \to \ldots,$$

точная в каждом члене, называется *точной.*

Теорема 7.4. *Рассмотрим коммутативную диаграмму* $(*)$ *гомоморфизмов векторных пространств*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathcal{A}^2 & \xrightarrow{\alpha_2} & \ldots\mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\
 & & \downarrow h & & \downarrow h_0 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_n \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{B}^2 & \xrightarrow{\beta_2} & \ldots\mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \\
 & & \downarrow l & & \downarrow l_0 & & \downarrow l_1 & & \downarrow l_2 & & \downarrow l_n \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{\gamma_0} & \mathcal{C}^1 & \xrightarrow{\gamma_1} & \mathcal{C}^2 & \xrightarrow{\gamma_2} & \ldots\mathcal{C}^n & \xrightarrow{\gamma_n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

все столбцы которой, начиная со второго, точны, а строки удовлетворяют условиям

$$\alpha_0\alpha = \alpha_{i+1}\alpha_i = \beta_0\beta = \beta_{i+1}\beta_i = \gamma_0\gamma = \gamma_{i+1}\gamma_i = 0.$$

Тогда диаграмма $(*)$ *порождает точную последовательность векторных пространств* $(**)$

$$0 \to H^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tilde{h}_0} H^0(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{l}_0} H^0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} H^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tilde{h}_1} H^1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{l}_1} H^1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} H^2(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tilde{h}_2} ...,$$

где

$$H^0(\mathcal{A}) = Ker(\alpha_0), \quad H^n(\mathcal{A}) = Ker(\alpha_n)/Im(\alpha_{n-1})$$
$$H^0(\mathcal{B}) = Ker(\beta_0), \quad H^n(\mathcal{B}) = Ker(\beta_n)/Im(\beta_{n-1})$$
$$H^0(\mathcal{C}) = Ker(\gamma_0), \quad H^n(\mathcal{C}) = Ker(\gamma_n)/Im(\gamma_{n-1}).$$

Proof. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_n)$. Ввиду точности столбца существует элемент $b \in \mathcal{B}^n$ такой, что $l_n(b) = c$. Положим $b' = \beta_n b$. Тогда, в виду коммутативности диаграммы, $l_{n+1}b' = l_{n+1}(\beta_n b) = \gamma_n(l_n b) = \gamma_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует элемент $a \in \mathcal{A}^{n+1}$ такой, что $h_{n+1}(a) = b'$. Более того, в виду коммутативности диаграммы, $h_{n+2}(\alpha_{n+1}a) = \beta_{n+1}(h_{n+1}a) = \beta_{n+1}b' = \beta_{n+1}\beta_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde{\alpha}_{n+1}a = 0$, то есть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_{n+1})$.

Таким образом, мы сопоставили элементу $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_n)$ некоторый элемент $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_{n+1})$. Наша конструкция, однако, не однозначна, поскольку элемент $b \in \mathcal{B}^n$ со свойством $l_n(b) = c$ не единственный. Любой другой элемент с этим свойством отличается от выбранного нами элемента b на элемент $b_0 \in \mathcal{B}^n$ со свойством $l_n(b_0) = 0$. Согласно нашей конструкции, замена b на $b + b_0$ меняет a на $a + a_1$, где $a_1 = h_{n+1}^{-1}\beta_n b_0$. С другой стороны, ввиду точности столбца, $b_0 = h_n a_0$, где $a_0 \in \mathcal{A}^n$. Таким образом, в виду коммутативности диаграммы, $a_1 = h_{n+1}^{-1}\beta_n h_n a_0 = \alpha_n a_0 \in \mathtt{Im}(\alpha_n)$. Следовательно, a и $a + a_1$ представляют один и тот же элемент в $H^{n+1}(\mathcal{A})$. То есть построенное соответствие $c \mapsto a$ дает гомоморфизм $\tilde{\delta}_n : \mathrm{Ker}(\gamma_n) \to H^{n+1}(\mathcal{A})$.

Пусть теперь $\tilde{c} \in \mathrm{Im}(\gamma_{n-1})$, то есть $\tilde{c} = \gamma_{n-1}c'$ для некоторого $c' \in \mathcal{C}^{n-1}$. Ввиду точности столбца, существует элемент $b' \in \mathcal{B}^{n-1}$ такой, что $l_{n-1}(b') = c'$. Положим $b'_0 = \beta_{n-1}b'$. Ввиду коммутативности диаграммы $l_n b'_0 = \tilde{c}$. Следовательно,

$\tilde{\delta}_n(\tilde{c}) = h_{n+1}^{-1}\beta_n\beta_{n-1}b' = 0$, в виду $\beta_n\beta_{n-1} = 0$. Таким образом, построенное в начале доказательства соответствие $c \mapsto a$ порождает гомоморфизм $\tilde{\delta}_n : H^n(\mathcal{C}) \to H^{n+1}(\mathcal{A})$.

Диаграмма коммутативна и, следовательно, $\beta_n h_n = h_{n+1}\alpha_n$. Поэтому $h_n(\mathrm{Ker}(\alpha_n)) \subset \mathrm{Ker}(\beta_n)$ и $h_n(\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\beta_{n-1})$. Таким образом, гомоморфизм h_n порождает гомоморфизм $\tilde{h}_n : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B})$. Аналогично гомоморфизм l_n порождает гомоморфизм $\tilde{l}_n : H^n(\mathcal{B}) \to H^n(\mathcal{C})$.

Мы построили последовательность $(**)$. Докажем теперь её точность. Начнем с точности в члене $H^n(\mathcal{B})$. Равенство $l_n h_n = 1$ влечет $\tilde{l}_n\tilde{h}_n = 1$. Осталось доказать, что любой элемент $\tilde{b} \in \mathrm{Ker}(\tilde{l}_n)$ принадлежит $\mathrm{Im}(\tilde{h}_n)$. По определению $\tilde{b} = b + \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$, где $\beta_n(b) = 0$ и $l_n(b) = \gamma_{n-1}(c')$, $c' \in \mathcal{C}^{n-1}$. В виду точности столбца, $c' = l_{n-1}(b')$, где $b' \in \mathcal{B}^{n-1}$. Положим $b" = \beta_{n-1}(b')$. Элемент $\bar{b} = b - b"$ тоже представляет элемент $\tilde{b}$, причем, в виду коммутативности диаграммы, $l_n(\bar{b}) = 0$. Поэтому, в виду точности столбца, $\bar{b} = h_n(a)$, где $a \in \mathcal{A}^n$. Более того $\alpha_n(a) = 0$, в виду $\beta_n(\bar{b}) = \beta_n(b) = 0$ и коммутативности диаграммы. Это означает, что класс $\tilde{a} \in H^n(\mathcal{A})$ в котором лежит a переходит в $\tilde{b}$ под действием $\tilde{l}_n$.

Докажем точность последовательности $(**)$ в члене $H^n(\mathcal{A})$. Рассмотрим $\tilde{c} \in H^{n-1}(\mathcal{C})$ и элемент $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_{n-1})$, представляющий класс $\tilde{c}$. В виду точности столбца, существует элемент $b \in \mathcal{B}^{n-1}$ такой что $l_{n-1}(b) = c$. С другой стороны, согласно нашим определениям, элемент $\beta_{n-1}(b) \in \mathrm{Im}(\beta_{n-1})$ представляет класс $\tilde{h}_n\tilde{\delta}_{n-1}(\tilde{c})$. Таким образом, этот класс равен $0 \in H^n(\mathcal{B})$.

Осталось доказать, что любой элемент $\tilde{a} \in \mathrm{Ker}(\tilde{h}_n)$ принадлежит $\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$. По определению $\tilde{a} = a + \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$, где $\alpha_n(a) = 0$ и $h_n(a) = \beta_{n-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}^{n-1}$. Рассмотрим $c = l_{n-1}(b)$. Тогда, в виду коммутативности диаграммы и точности столбца, $\gamma_{n-1}c = l_n\beta_{n-1}b = l_n h_n a = 0$. Таким образом, c представляет некоторый класс $\tilde{c} \in H^{n-1}(\mathcal{C})$. С другой стороны, согласно нашему определению, $\tilde{\delta}_{n-1}(\tilde{c}) = \tilde{a}$.

Докажем точность последовательности $(**)$ в члене $H^n(\mathcal{C})$. Рассмотрим $\tilde{b} \in H^n(\mathcal{B})$ и элемент $b \in \mathrm{Ker}(\beta_n)$, представляющий класс $\tilde{b}$. Тогда, согласно нашим определениям, элемент $h_{n+1}^{-1}\beta_n l_n^{-1} l_n(b) = h_{n+1}^{-1}\beta_n(b) = 0$ представляет класс $\tilde{\delta}_n\tilde{l}_n(\tilde{b})$. Таким образом, $\tilde{\delta}_n\tilde{l}_n = 0$.

Осталось доказать, что любой элемент $\tilde{c} \in \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)$ принадлежит $\mathrm{Im}(\tilde{l}_n)$. Рассмотрим элемент $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_n)$, представляющий класс $\tilde{c}$. Условие $\tilde{\delta}_n(\tilde{c}) = 0$ означает, что существуют такие $b \in \mathcal{B}^n$ и $a \in \mathcal{A}^n$, что $l_n(b) = c$ и $h_{n+1}\alpha_n(a) = \beta_n(b)$. Положим $\bar{b} = b - h_n(a)$. Тогда, в виду коммутативности диаграммы, $\beta_n(\bar{b}) = 0$ и, следовательно, $\bar{b}$ порождает некоторый элемент из $\tilde{b} \in H^n(\mathcal{B})$. С другой стороны, $l_n(\bar{b}) = l_n(b) = c$ виду точности столбца. Таким образом, $\tilde{l}_n(\bar{b}) = \tilde{c}$. □

7.5. **Когомологическая последовательность Майера-Вьеториса.** В этом разделе мы найдем формулу, позволяющую находить когомологии объединения двух гладких многообразий через когомологии каждого из них и когомологии их пересечения.

Пусть компактное гладкое многообразие M представлено в виде объединения двух открытых подмножеств $M = M_1 \bigcup M_2$. Обозначим через $\widetilde{M} = M_1 \coprod M_2$ их несвязное объединение.

Естественное отображение $h: \widetilde{M} \to M$ порождает гомоморфизм

$$h_n: \mathcal{E}^n(M) \to \mathcal{E}^n(\widetilde{M}) = \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2).$$

Рассмотрим гомоморфизмы ограничений дифференциальных форм

$$l_n^i: \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2) \to \mathcal{E}^n(M_i) \to \mathcal{E}^n(M_1 \cap M_2)$$

и их разность

$$l_n = l_n^2 - l_n^1: \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2) \to \mathcal{E}^n(M_1 \cap M_2).$$

Мы получили последовательность гомоморфизмов векторных пространств

$$0 \to \mathcal{E}^n(M) \xrightarrow{h_n} \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2) \xrightarrow{l_n} \mathcal{E}^n(M_1 \cap M_2) \to 0,$$

которая называется *короткой последовательностью Майера-Вьеториса.*

Лемма 7.4. *Короткая последовательность Майера-Вьеториса точна.*

Proof. Пусть $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$. Тогда $h_n(\omega)$ — это сумма ограничений формы ω на M_1 и M_2. Следовательно, $h_n(\omega) \neq 0$, если $\omega \neq 0$. А это и означает точность последовательности в члене $\mathcal{E}^n(M)$.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$, состоящее из дифференциальных форм $\omega_1 \oplus \omega_2 \in \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2)$ таких что $\omega_1|_{M_1 \cap M_2} = \omega_2|_{M_1 \cap M_2}$. Тогда $h_n(\mathcal{E}^n(M)) = \mathcal{E}$. С другой стороны, $l_n(\omega)$ — это разность ограничений формы $\omega \in \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2)$ на M_1 и M_2. Таким образом, $l_n(\mathcal{E}) = 0$. А это и означает точность последовательности в члене $\mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2)$.

Точность последовательности в члене $\mathcal{E}^n(M_1 \cap M_2)$ означает сюръективность гомоморфизма l_n. Рассмотрим произвольную дифференциальную форму $\nu \in \mathcal{E}^n(M_1 \cap M_2)$. Рассмотрим разбиение единицы (ρ_1, ρ_2), подчиненное покрытию (M_1, M_2) многообразия M (лемма 5.1). Другими словами, ρ_i — это неотрицательные функции на M с носителями, принадлежащими M_i, такими, что $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Рассмотрим теперь сечения $\nu_i = \rho_{3-i}\nu$. Тогда $\nu_i \in \mathcal{E}^n(M_i)$ и $l_n((-\nu_1) \oplus (\nu_2)) = \nu_1 + \nu_2 = \nu$. □

Теорема 7.5. *Короткая последовательность Майера-Вьеториса порождает точную последовательность гомологий*

$$0 \to H^0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{h}_0} H^0(M_1, \mathbb{R}) \oplus H^0(M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{l}_0} H^0(M_1 \cap M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} H^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{h}_1}$$

$$H^1(M_1, \mathbb{R}) \oplus H^1(M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{l}_1} H^1(M_1 \cap M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} H^2(M, \mathbb{R})...,$$

которая называется длинной последовательностью Майера-Вьеториса

Proof. Рассмотрим коммутативную диаграмму векторных пространств

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{in} & \mathcal{E}^0(M) & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1(M) & \xrightarrow{d} & \ldots\mathcal{E}^n(M) & \xrightarrow{d} & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_n} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{in} & \bigoplus\limits_{i=1,2}\mathcal{E}^0(M_i) & \xrightarrow{d} & \bigoplus\limits_{i=1,2}\mathcal{E}^1(M_i) & \xrightarrow{d} & \cdots\bigoplus\limits_{i=1,2}\mathcal{E}^n(M_i) & \xrightarrow{d} & , \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle l_0} & & \downarrow{\scriptstyle l_1} & & \downarrow{\scriptstyle l_n} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{in} & \mathcal{E}^0(M_1\cap M_2) & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1(M_1\cap M_2) & \xrightarrow{d} & \ldots\mathcal{E}^n(M_1\cap M_2) & \xrightarrow{d} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

в которой "id" означает тождественное отображение, а "in" — гомоморфизм, сопоставляющий числу постоянную функцию с этим числовым значением. Эта диаграмма удовлетворяет теореме 7.4 согласно леммам 7.4 и 5.3. Применение этой теоремы и дает нужное утверждение. □

Задача 7.10. *Пусть $\omega \in H^n(M_1 \cap M_2, \mathbb{R})$. Тогда $\tilde{\delta}_n(\omega) \in H^{n+1}(M, \mathbb{R})$ является когомологическим классом формы ξ, где $\xi|_{M_1} = -d(\rho_2\omega)$, $\xi|_{M_2} = d(\rho_1\omega)$ и (ρ_1, ρ_2) — разбиение единицы, подчиненное покрытию (M_1, M_2) многообразия M.*

Вот важные примеры использования последовательности Майера-Вьеториса. Для краткости мы будем писать $H^n(M)$ вместо $H^n(M, \mathbb{R})$.

Лемма 7.5. *Когомологии окружности $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.*

Proof. Представим окружность в виде объединения двух интервалов I_1 и I_2. Тогда, согласно лемме 7.1, $H^0(S^1) = H^0(I_i) = \mathbb{R}$ и $H^0(I_1 \cap I_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Согласно лемме Пуанкаре, $H^1(I_i) = H^1(I_1 \cap I_2) = 0$. Таким образом, длинная последовательность Майера-Вьеториса имеет вид

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{h_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^1) \xrightarrow{h_1} 0 \xrightarrow{l_1} 0.$$

В виду точности длинной последовательности, $\mathrm{Ker}(l_0) = \mathrm{Im}(h_0) = \mathbb{R}$. Следовательно, $\mathrm{Im}(l_0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\delta_0) = \mathrm{Im}(l_0) = \mathbb{R}$ и $\mathrm{Im}(\delta_0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Следовательно, $H^1(S^1) = \mathrm{Ker}(h_1) = \mathbb{R}$. □

Теорема 7.6. *Когомологии сферы $H^n(S^k) = \mathbb{R}$ при $n = 0, k$ и $H^n(S^k) = 0$ в остальных случаях.*

Proof. Будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ нужное утверждение уже доказано. Пусть нужное утверждение доказано для всех $k < N$. Рассмотрим случай $k = N > 1$.

Представим сферу S^k в виде объединения двух $k-1$-мерных дисков D_1, D_2, гомотопных точке и с пересечением $D_1 \cap D_2$, гомотопным S^{k-1}. По тем же соображении, что и в доказательстве леммы 7.5, начало последовательности Майера-Вьеториса имеет вид

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{h_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^k) \xrightarrow{h_1} H^1(D_1) \oplus H^1(D_2) \xrightarrow{l_1} H^1(D_1 \cap D_2) \ldots.$$

Таким образом, $\mathtt{Im}(\delta_0) = 0$, причем $H^1(D_1) = H^1(D_2) = 0$ согласно лемме Пуанкаре. Поэтому из точности последовательности следует, что $H^1(S^k) = 0$.

Рассмотрим теперь участок

$$H^{r-1}(D_1) \oplus H^{r-1}(D_2) \xrightarrow{l_{r-1}} H^{r-1}(D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\delta_{r-1}} H^r(S^k) \xrightarrow{h_r} H^r(D_1) \oplus H^r(D_2).$$

Он эквивалентен

$$0 \xrightarrow{l_{r-1}} H^{r-1}(S^{k-1}) \xrightarrow{\delta_{r-1}} H^r(S^k) \xrightarrow{h_r} 0.$$

Откуда $H^r(S^k) = H^{r-1}(S^{k-1})$. По предположению индукции, отсюда следует, что $H^r(S^k) = 0$ при $r \neq k$ и $H^r(S^k) = \mathbb{R}$ при $r = k$. $\square$

7.6. **Двойственность Пуанкаре.** Двойственность Пуанкаре — это важное соотношение Размерностями пространств когомологий различной размерности. Для его обоснования нам понадобится несколько лемм.

Лемма 7.6. *Дифференциальная k-форма ω на S^k точна, если и только если* $\int\limits_{S^k} \omega = 0$.

Proof. Согласно следствию 6.1 $\int\limits_{S^k} d\eta = 0$. Поэтому гомоморфизм $\omega \mapsto \int\limits_{S^k} \omega$ порождает гомоморфизм $\Phi : H^k(M) \to \mathbb{R}$. Это отображение — эпиморфизм. Для доказательства рассмотрим гладкую неотрицательную функцию $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ с компактным непустым носителем, дифференциальную форму $f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ и её образ χ на S^k при компактификации бесконечной точкой пространства $\mathbb{R}^k$. Тогда $\Phi(\chi) = A > 0$. Следовательно, форма χ не точна и порождает единственный, согласно теореме 7.6, ненулевой класс когомологий из $H^k(M)$.

Таким образом, если ω не точна, то $\omega = \alpha\chi + \delta$, где $\alpha \neq 0$ и δ — точная форма. Следовательно, $\int\limits_{S^k} \omega = \alpha A \neq 0$. $\square$

Лемма 7.7. *Пусть ω — финитная k-форма на $\mathbb{R}^k$, такая, что* $\int\limits_{\mathbb{R}^k} \omega = 0$. *Рассмотрим шар $B \subset \mathbb{R}^k$, содержащий замыкание носителя формы ω. Тогда $\omega = d\eta$, где замыкание носителя формы η содержится в шаре B.*

Proof. Рассмотрим гладкое отображение $\Psi : \mathbb{R}^k \to S^k$, переводящее $\mathbb{R}^k \setminus B$ в точку $p \in S^k$. Это отображение переносит форму ω в дифференциальную k-форму $\tilde{\omega}$ на S^k такую, что $\int\limits_{S^k} \tilde{\omega} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \omega = 0$. Следовательно, форма $\tilde{\omega}$ точна, согласно лемме 7.6, то есть $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$. Согласно лемме 7.2 её обратный образ относительно Ψ имеет вид $\omega = d\eta$, где η — обратный образ формы $\tilde{\eta}$. При этом $\eta = 0$ на $\mathbb{R}^k \setminus B$. $\square$

Лемма 7.8. *Пусть M компактное гладкое ориентированное многообразие размерности k без границы. Тогда дифференциальная k-форма ω на M точна, если и только если* $\int\limits_M \omega = 0$.

Proof. Согласно следствию 6.1, если ω — точная форма на M, то $\int\limits_M \omega = 0$. Докажем, что верно и обратное утверждение: если ω — k-форма на M и $\int\limits_M \omega = 0$, то форма ω точна.

Покроем M конечным набором стягиваемых областей $M = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_i$. Рассмотрим разбиение единицы $\{\psi_i\}$, подчиненное покрытию $U_1 \dots, U_n$. Положим

$$\omega_i = \psi_i \omega \quad , a_i = \int\limits_M \omega_i \quad \text{и} \quad a = \sum_{k=1}^{n} a_i.$$

Тогда $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_M \omega_i = \int\limits_M \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_i = \int\limits_M \omega = 0$

Выберем стягиваемую область U_0 такую, что каждое объединение $U_0 \cup U_i$ содержится в некоторой стягиваемой области V_i. (Это всегда можно сделать, взяв достаточно маленькую область U_0.) Используя конструкцию из доказательства леммы 7.6, построим финитную k-форму ω_0 с носителем в U_0 такую, что $\int\limits_{U_0} \omega_0 = 1$.

Рассмотрим финитные формы $\xi_i = \omega_r - a_i\omega_0$ с носителем на V_i. Тогда $\int\limits_{V_i} \xi_i = 0$ и, следовательно, согласно лемме 7.7, $\xi_i|_{V_i} = d\eta$, где η — гладкая (k-1) форма на V_i, равная 0 на ∂V_i. Продолжим η нулем до гладкой формы $\tilde{\eta}$ на M. Тогда $\xi_i = d\tilde{\eta}$ на M и, следовательно, ξ_i точна. Таким образом, $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_i$ — тоже точная форма. С другой стороны, $\xi = \omega - a\omega_0 = \omega$. $\square$

Теорема 7.7. *Старшие когомологии компактного ориентируемого гладкого k-мерного многообразия без границы M одномерны. То есть $H^k(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*

Proof. Рассмотрим форму ω_0, построенную при доказательстве леммы 7.8. Она замкнута на M, как и любая k-форма. Рассмотрим произвольную k-форму χ на M и её интеграл $A = \int\limits_M \chi$ по M. Положим $\omega = \chi - A\omega_0$. Тогда $\int\limits_M \omega = 0$ и, следовательно, согласно лемме 7.8, ω — точная форма. С другой стороны, $\chi = A\omega_0 - \omega$ и, следовательно, форма χ представляет тот же когомологический класс, что и $A\omega_0$. $\square$

Пример 7.1. *Найдем первые когомологии двумерного тора $T = S^1 \times S^1$.*

Представим T в виде объединения двух цилиндров D_1 и D_2, пересечение которых состоит из 2 колец. Точная последовательность Майера-Вьеториса имеет вид

$$0 \to H^0(T) \xrightarrow{h_0} H^0(D_1) \oplus H^0(D_1) \xrightarrow{l_0} H^0(D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\delta_0} H^1(T))$$

$$\xrightarrow{h_1} H^1(D_1) \oplus H^1(D_2) \xrightarrow{l_1} H^1(D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\delta_1} H^2(T) \xrightarrow{h_2} H^2(D_1) \oplus H^2(D_2).$$

Согласно тереме 7.7, она эквивалентна

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{h_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1(T) \xrightarrow{h_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{R} \xrightarrow{h_1} 0,$$

откуда

$$0 \to \mathbb{R} \to H^1(T) \to \mathbb{R} \to 0.$$

Таким образом, $H^1(T) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Задача 7.11. *Используя теорему Майера-Вьеториса и теорему 7.7, найти когомологии всех компактных ориентируемых поверхностей.*

Пусть M — компактное ориентированное гладкое k-мерное многообразие без границы и $0 < n < k$. Зададим спаривание между дифференциальными формами $\omega_1 \in \mathcal{E}^n(M)$ и $\omega_2 \in \mathcal{E}^{k-n}(M)$ формулой

$$< \omega_1, \omega_2 > = \int_M \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Это спаривание коммутативно при четном $n(k-n)$ и антикоммутативно, если n и $k-n$ нечетны.

Определим теперь аналогичное спаривание между когомологиями. Рассмотрим классы когомологий $h_1 \in H^n(M, \mathbb{R})$ и $h_2 \in H^{k-n}(M, \mathbb{R})$ и представляющие их замкнутые дифференциальные формы $\omega_1 \in \mathcal{E}^n(M)$, $\omega_2 \in \mathcal{E}^{k-n}(M)$. Положим

$$(h_1\,,\, h_2) =< \omega_1, \omega_2 > .$$

Докажем, что определение корректно, то есть не меняется при замене форм ω_1 и ω_2 на когомологичные. Рассмотрим произвольные точные формы $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$, где $\alpha_1 \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$, $\alpha_2 \in \mathcal{E}^{k-n-1}(M)$. Тогда $d(\omega_1 \wedge \alpha_2) = d\omega_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^n \omega_1 \wedge d\alpha_2 = (-1)^n \omega_1 \wedge d\alpha_2$. Следовательно, $\omega_1 \wedge d\alpha_2$ — точная форма и, согласно следствию 6.1,

$$< \omega_1, d\alpha_2 >= \int_M \omega_1 \wedge d\alpha_2 = 0.$$

Аналогично, $< \omega_2, d\alpha_1 >=< d\alpha_1, d\alpha_2 >= 0$, откуда $< \omega_1 + d\alpha_1, \omega_2 + d\alpha_2 >=< \omega_1, \omega_2 > + < \omega_1, d\alpha_2 > + < d\alpha_1, \omega_2 > + < d\alpha_1, d\alpha_2 >=< \omega_1, \omega_2 >$.

Можно доказать, что определенное нами спаривание на когомологиях невырождено. То есть для каждого ненулевого $h_1 \in H^n(M, \mathbb{R})$ существует $h_2 \in H^{k-n}(M, \mathbb{R})$ такое, что $(h_1\,,\, h_2) \neq 0$. Отсюда, разумеется, следует, что для каждого ненулевого $h_2 \in H^{k-n}(M, \mathbb{R})$ существует $h_1 \in H^n(M, \mathbb{R})$ такое, что $(h_1\,,\, h_2) \neq 0$.

Мы не будем доказывать эту трудную теорему, но приведем ее важное следствие, продолжающую терему 7.7.

Теорема 7.8. *(Двойственность Пуанкаре) Размерности пространств когомологий компактного ориентируемого гладкого k-мерного многообразия без границы M связаны соотношением* $\dim H^n(M, \mathbb{R}) = \dim H^{k-n}(M, \mathbb{R})$.

Proof. Сопоставим классу $h \in H^n(M, \mathbb{R})$ линейный функционал $l_h : H^{k-n}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, где $l_h(g) = (h, g)$. Это соответствие порождает гомоморфизм в сопряженное пространство $L : H^n(M, \mathbb{R}) \to (H^{k-n}(M, \mathbb{R}))^*$. Если $h \in \mathsf{Ker}(L)$, то $(h, H^{k-n}(M, \mathbb{R})) = 0$ и $h = 0$ в виду невырожденности спаривания. Таким образом, $\mathsf{Ker}(L) = 0$, откуда $\dim H^n(M, \mathbb{R}) \leq \dim(H^{k-n}(M, \mathbb{R}))^* = \dim H^{k-n}(M, \mathbb{R})$. Аналогично $\dim H^{k-n}(M, \mathbb{R}) \leq \dim H^n(M, \mathbb{R})$. □

8. Риманова геометрия

8.1. **Риманова метрика.** Введем теперь на произвольном гладком компактном многообразии M размерности r структуру, позволяющую измерять на ней дины кривых, углы между ними, объёмы и д.п. Идея состоит в том, чтобы ввести структуру евклидова пространства в инфинитезимальной окрестности каждой точки $p \in M$, то есть на касательном пространстве T_p. Причем сделать это так, чтобы эта структура евклидова пространства менялась от точки к точке гладким образом.

Строгое определение даётся в терминах векторных расслоений. Рассмотрим квадрат кокасательного расслоения $\pi^* : T^*M \otimes T^*M \to M$ и его гладкое сечение $\tilde{g}$. Такое сечение $\tilde{g}$ представляет собой гладко зависящее от точки $p \in M$ семейство биковекторов $\tilde{g}_p$. На каждом касательном пространстве T_pM сечение $\tilde{g}$ порождает билинейную форму $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, где $g_p(v_p, w_p) = \tilde{g}_p(v_p \otimes w_p)$. Объединение билинейных форм $g = \bigcup\limits_{p \in M} g_p$ образует гладкое семейство билинейных форм на касательных пространствах T_pM.

Семейство билинейных форм g называется *римановой метрикой*, если на каждом касательном пространстве T_pM билинейная форма g_p является симметричной (то есть $g_p(v', v'') = g_p(v'', v')$) и положительно определенной (то есть $g_p(v, v) > 0$ при $v \neq 0$). Многообразие M с выбранной римановой метрикой формой называется *римановым многообразием.*

Риманова метрика g позволяет отождествить касательное пространство $T_p(M)$ и кокасательное пространство $T_p^*(M)$ в каждой точке $p \in M$. Для этого надо сопоставить вектору $v \in T_p(M)$ линейную форму $l(w) = g_p(w, v)$. Эта конструкция отождествляет касательное $T(M)$ и кокасательное $T^*(M)$ расслоение.

Задача 8.1. *Используя разбиение единицы, докажите, что на каждом компактном многообразии можно задать много различных структур риманова многообразия.*

Пример 8.1. *В стандартном векторном пространстве $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \ldots, x^n)\}$ стандартное скалярное произведение $g(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$ задает структуру риманова многообразия, которая называется евклидовым пространством. Пусть теперь гладкое r-мерное многообразие M вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то есть $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда касательное пространство T_p к многообразию M в точке $p \in M$ естественно отождествляется с r-мерной плоскостью в $\mathbb{R}^n$, касающейся многообразия M в точке p (см. раздел 2.1). Ограничение билинейной формы g на гиперплоскости T_p задает на M структуру риманова многообразия. Она называется римановой структурой, индуцированной вложением $M \to \mathbb{R}^n$.*

Посмотрим, как структура риманова многообразия описывается *в локальной карте.* Рассмотрим локальную карту (U, φ), где $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \ldots, x^r)\}$, и перенесем гомеоморфизмом φ координаты $\{(x^1, \ldots, x^r)\}$ на U. Тогда вектора $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^r})$ образуют базис в каждом касательном пространстве $T_p(M)$ точки $p \in U$.

В локальной карте (U, φ) биковекторное поле $\tilde{g}$ имеет вид $\tilde{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Значение поля на векторах $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ равно

$$g(v, w) = g(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, w^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ij} v^i w^j, \quad \text{где} \quad g_{ij} = g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big).$$

Таким образом, *матрица Грамма* $g_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big)$ целиком определяет метрику на локальной карте.

Задача 8.2. *Докажите, что при замене координат* $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$ *матрица Грамма* g_{ij} *переходит в матрицу Грамма* $\tilde{g}_{ij} = g_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^j}$

Это подсказывает следующий удобный для вычислений способ задать риманову метрику. Надо покрыть многообразие M атласом карт $\{(U^\alpha, \varphi^\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ и задать в каждой области $\varphi^\alpha(U^\alpha)$ функцию $g^\alpha_{ij}(x)$ со значениями в симметричных положительно определенных матрицах, причем так, чтобы $g^\beta_{ij} = g^\beta_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^j}$, где $\tilde{x} = \varphi^\beta(\varphi^\alpha)^{-1}(x)$ при $x \in \varphi^\alpha(U^\alpha \cap U^\beta)$.

Риманова метрика на многообразии позволяет определить *длину кривой*. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to M$. В каждой точке $p = \gamma(t_0)$ определен касательный вектор к кривой $\frac{\partial \gamma}{dt}(t_0)$. Длина касательного вектора равна $\sqrt{g_{\gamma(t_0)}(\frac{\partial \gamma}{dt}(t_0), \frac{\partial \gamma}{dt}(t_0))}$. Интеграл этой длины по кривой

$$||\gamma|| = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}\Big(\frac{\partial \gamma}{dt}(t), \frac{\partial \gamma}{dt}(t)\Big)}dt.$$

называется *длиной кривой.*

Посмотрим, как это выглядит в локальной карте (U, φ). Координатная запись кривой имеет вид $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^r(t))$. Касательные вектор в точке $p \subset M$ равен $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial \gamma^i}{\partial t}(t_0)\frac{\partial}{\partial x^i}$. Таким образом, длина кривой равна

$$||\gamma|| = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ij}(t)\frac{\partial \gamma^i(t)}{\partial t}\frac{\partial \gamma^j(t)}{\partial t}}dt.$$

Задача 8.3. *Доказать, что длина кривой является пределом длин, аппроксимирующих её ломаных.*

Угол φ между кривыми $\gamma' : [0,1] \to M$, $\gamma'' : [0,1] \to M$ в общей точке $\gamma'(0) = \gamma''(0) = p$ определяется как угол между их касательными в этой точке. То есть

$$\cos(\varphi) = \frac{g(\gamma'_p, \gamma''_p)}{\sqrt{g(\gamma'_p, \gamma'_p) g(\gamma''_p, \gamma''_p)}}.$$

Для вычисления объема подмножества N евклидова пространства $\mathbb{R}^r = \{x^1, \dots, x^r\}$ со стандартными ортонормированными базисными векторами мы интегрируем по N дифференциальную форму объема $\int\limits_N dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$. Если базис не ортонормированный и его матрица Грамма равна g_{ij}, то объем дается интегралом

$$\int\limits_N \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

На произвольном многообразии M каждое касательное пространство $T_x M$ наделено скалярным произведением. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega(x) = \sqrt{det(g_{ij})}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$, где g_{ij} — матрица Грамма этого скалярного произведения в базисе $dx^1, \dots, dx^r$.

Задача 8.4. *Докажите, что так определенная форма ω не зависит от выбора локальной карты и, следовательно, определена на всем многообразии M*

Форма ω задает форму объема в малой окрестности каждой точки $x \in M$ и называется *формой объема на M.* Она порождает объем любой ориентируемой области $N \subset M$ с помощью интегрирования

$$V(N) = \int\limits_N \omega.$$

В качестве примера рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{R}^r$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_r$ и сопряженным ему базисом $l^1, \dots, l^r$, где $l^i(e_j) = \delta^i_j$. Тогда биковектор $\sum\limits_{i=1}^{r} l^i \otimes l^i$ порождает стандартную метрику на V, где $(a^i e_i, b^j e_j) = \sum\limits_{i=1}^{r} a^i b^i$. Пусть $M \subset \mathbb{R}^r$ — вложенное многообразие. Касательное пространство в точке $p \in M$ можно интерпретировать как аффинное подпространство в $\mathbb{R}^r$.

Задача 8.5. *Доказать, что ограничения метрики $\mathbb{R}^r$ на эти подпространства задает на M структуру риманова многообразия с известными из классического анализа длинами и объемами.*

8.2. **Алгебра векторных полей.** Векторными полями на гладком многообразии M называются гладкие сечения касательного расслоение $\pi : TX \to M$. Множество векторных поле образует бесконечномерное вещественное векторное пространство $\mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$. Более того, они образуют модуль над кольцом гладких функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ на M.

Значение сечения V в точке p является вектором $V_p \in T_pM$. Согласно разделу 2.2, вектор V_p порождает оператор $\tilde{V}_p : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, называемый дифференцированием в точке. Он определяется как дифференцирование в точке p по направлению пути, отвечающему вектору V_p. Оператор $\tilde{V}_p$ линеен, то есть

$$\tilde{V}_p(f+g) = \tilde{V}_p(f) + \tilde{V}_p(g); \quad \tilde{V}_p(kf) = k\tilde{V}_p(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

, и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\tilde{V}_p(fg) = \tilde{V}_p(f)g(p) + f(p)\tilde{V}_p(g). \tag{9}$$

Векторное поле V порождает отображение $\tilde{V} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, сопоставляя функции $f \in \mathcal{F}$ функцию $\tilde{V}(f)(p) = \tilde{V}_p(f)$. Свойства (8), (9) переходят при этом в условие линейности

$$\tilde{V}(f+g) = \tilde{V}(f) + \tilde{V}(g); \quad \tilde{V}(kf) = k\tilde{V}(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R}; \tag{10}$$

и правило Лейбница

$$\tilde{V}(fg) = \tilde{V}(f)g + f\tilde{V}(g). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь произвольный линейный оператор $\tilde{V} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, удовлетворяющий правилу Лейбница (11). Тогда оператор $\tilde{V}_p(f) = \tilde{V}(f)(p)$ в каждой точке p удовлетворяет условиям (8), (9) и, следовательно, согласно теореме 2.1, порождается некоторым вектором $V_p \in T_pM$. Таким образом, оператор $\tilde{V}$ порождается некоторым векторным полем $V = \{V_p | p \in M\}$. Подведем итог:

Теорема 8.1. *Линейные операторы $V : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, удовлетворяющие правилу Лейбница (11), взаимнооднозначно отвечают векторным полям на M.*

Далее в этом разделе под векторным полем V мы будем понимать линейный оператор $V : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, удовлетворяющий правилу Лейбница (11).

Задача 8.6. *Докажите, что для гладкой функции f и векторных полей V, W выполняется $V(fW) = V(f)W + fVW$*

Лемма 8.1. *Коммутатор $[V, W] = VW - WV : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ векторных полей $V, W : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ также является векторным полем.*

Proof. Оператор линеен, поскольку

$$[V,W](f+g) = VW(f+g) - WV(f+g) = \big(VW(f) - WV(f)\big) +$$
$$\big(VW(g) - WV(g)\big) = [V,W](f) + [V,W](g) \quad \text{и} \quad [V,W](kf) = k[V,W](f).$$

Кроме того, согласно правилу Лейбница

$$VW(fg) = V\big(W(f)g + fW(g)\big) =$$
$$VW(f)g + W(f)V(g) + V(f)W(g) + fVW(g).$$

Следовательно,

$$[V,W](fg) = VW(fg) - WV(fg) = \big(VW(f)g + W(f)V(g) + V(f)W(g) + fVW(g)\big) -$$
$$\big(WV(f)g + V(f)W(g) + W(f)V(g) + fWV(g)\big) =$$
$$\big(VW(f)g - WV(f)g\big) + \big(fVW(g) - fWV(g)\big) = [V,W](f)g + f[V,W](g).$$

Таким образом, оператор $[V, W]$ удовлетворяет правилу Лейбница. □

Теорема 8.2. *Векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования $(V, W) \mapsto [V, W]$. То есть операция коммутирования антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби $[[V, W], U] + [[W, U], V] + [[U, V], W] = 0$.*

Proof. Антикоммутативность $[V, W] = -[W, V]$ следует сразу из определения $[V, W] = VW - WV$. Кроме того,

$$[[V,W],U] = [(VW - WV), U] = VWU - UVW - WVU + UWV.$$

Аналогично,

$$[[W,U],V] = WUV - VWU - VUW + WVU, \quad [[U,V],W] = UVW - WUV - UWV + VUW.$$

Отсюда следует тождество Якоби $[[V, W], U] + [[W, U], V] + [[U, V], W] = 0$. □

В локальной карте $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$, порождающей координаты $\{(x^1, \dots, x^r)\}$ на U, векторное поле V записывается в виде $V(x) = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$. В координатах $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$ это же векторное поле $V(x) = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ представляется в виде $V(\tilde{x}) = \tilde{v}^i(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$, где, согласно разделу 2.3,

$$\tilde{v}^j = v^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}. \tag{12}$$

Таким образом, мы можем задавать векторное поле V, определяя его в каждой карте с координатами $\{(x^1, \dots, x^r)\}$ некоторой формулой $V(x) = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, но так, чтобы эта формула была связана соотношением (12) с формулой $V(\tilde{x}) = \tilde{v}^i(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ этого поля в координатах $\{(x^1, \ldots, x^r)\}$.

Задача 8.7. *Пусть V и W — векторные поля на многообразии M, и V имеет вид $V(x) = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ в каждой локальной карте с координатами $x = \{x^1, \ldots, x^r\}$. Докажите, что отвечающие этим картам наборы векторов $W(v^i)(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ не образуют векторное поле.*

8.3. **Аффинная связность.** Как мы знаем, векторное поле $X \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$ однозначно определяет оператор дифференцирования функций

$$X : \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

переводящий функцию $f(p)$ в функцию $X(f)(p) = X_p(f)$. Ковариантное дифференцирование — это аналог такого оператора на множестве векторных полей. Мы тоже требуем от него линейности и аналога правила Лейбница.

Ковариантным дифференцированием по направлению векторного поля $X \in \mathcal{V}$ называется отображение множества векторных полей в себя

$$\nabla_X : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

со свойствами

$$\nabla_X(V+W) = \nabla_X V + \nabla_X W; \quad \nabla_X(kV) = k\nabla_X V \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$

$$\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V \quad \text{для} \quad f \in \mathbb{F}.$$

Далее мы увидим,что существует много операторов ∇_X с такими свойствами.

Аффинной связностью на гладком многообразии M называется отображение ∇, сопоставляющее каждому векторному X полю некоторое ковариантное дифференцирование ∇_X по направлению этого векторного поля так, что

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y.$$

Далее мы увидим, что аффинная связность позволяет определить параллельный перенос вектора вдоль кривой.

Посмотрим, как аффинная связность описывается в локальной карте (U, φ), с координатами $\{(x^1, \ldots, x^r)\}$. Векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $(i = 1, \ldots, r)$ образуют базис множества векторных полей $\mathcal{V}(U)$ как модуля над функциями $\mathcal{F}(U)$.

Рассмотрим два произвольных векторных поля

$$V = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad W = w^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда

$$\nabla_V W = \nabla_{v^i\frac{\partial}{\partial x^i}}\big(w^j\frac{\partial}{\partial x^j}\big) = v^i\frac{\partial w^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + v^i w^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Первый член суммы — это дифференцирование коэффициентов векторного поля W по направлению векторного поля V. Это дифференцирование не приводит, согласно задаче 8.7, к векторному полю. Второй член — это как раз та добавка, которая нужна, чтобы получилось векторное поле.

Разложение по базисным полям дает

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Гладкие функции Γ_{ij}^k называются *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля.* (Они, разумеется, зависят от выбора локальной карты.)

Зная символы Кристоффеля в карте с координатами $x = \{x^1, \dots, x^r\}$, мы можем найти ковариантную производную одного векторного поля по другому векторному полю по формуле

$$\nabla_{v^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \big(w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + v^i w^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

То есть

$$\nabla_{v^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \big(w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = U^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad , \text{где} \quad U^k = v^i \big(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} + w^j \Gamma_{ij}^k\big).$$

Задача 8.8. *Докажите, что при замене координат $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x)$ символы Кристоффеля меняются по формуле*

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{kj}^i \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\gamma} + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\gamma}. \tag{13}$$

Более того, мы можем задавать ковариантное дифференцирование ∇, определяя его в каждой карте с координатами $\{(x^1, \dots, x^r)\}$ некоторыми функциями $\Gamma_{kj}^i(x)$, но так, чтобы эти функции были связаны с формулой (13) при замене координат $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x)$.

8.4. **Аффинная связность, согласованная с римановой метрикой.** Пусть ∇ и g — аффинная связность и риманова метрика на гладком многообразии M. Они называются *согласованными*, если для любых векторных поле X, Y, Z на M выполняется

$$1^\circ \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y];$$
$$2^\circ \quad Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

В этом случае говорят также, что ∇ — это *связностью Леви-Чивита* метрики g. Первое условие, как мы дальше увидим, означает "симметрию" связности. Второе условие — это аналог правила Лейбница для дифференцирования римановой метрики.

Подставляя первое условие во второе, находим,

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_X Z - [X, Z], Y) + g(X, \nabla_Z Y) =$$
$$g(Y, \nabla_X Z) + g(X, \nabla_Z Y) + g(Y, [Z, X]).$$

Переставляя поля, находим

$$Yg(Z, X) = g(X, \nabla_Z Y) + g(Z, \nabla_Y X) + g(X, [Y, Z]),$$
$$Xg(Y, Z) = g(Z, \nabla_Y X) + g(Y, \nabla_X Z) + g(Z, [X, Y]).$$

Складывая первые два соотношения и вычитая третье, находим

(14)
$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y]).$$

Таким образом, риманова метрика g полностью определяет согласованную с ней аффинную связность по формуле(14), если такая аффинная связность существует. Существование нужной связности следует из

Теорема 8.3. *Отображение $\nabla_Z : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, построенное по римановой метрике g с помощью формулы (14), является аффинной связностью, согласованной с этой метрикой.*

Proof. Докажем сначала, что ∇_Z — ковариантное дифференцирование. Условие $\nabla_Z(aX+bY) = a\nabla_Z X + b\nabla_Z Y$, где $a, b \in \mathbb{R}$, следуют из билинейности формы $g(X,Y)$.

Отметим теперь, что

$$Zg(X, fY) = Z(fg(X,Y)) = Z(f)g(X,Y) + fZg(X,Y)) = g(X, Z(f)Y) + fZg(X,Y)).$$

Используя задачу 8.6, находим, что

$$g(X, [Z, fY]) = g(X, Z(fY) - fYZ) = g(X, Z(f)Y + fZY - fYZ)$$

$$g(X, Z(f)Y + f[Z,Y]) = g(X, Z(f)Y) + g(X, f[Z,Y]) = Z(f)g(X,Y) + fg(X, [Z,Y]).$$

Используя эти соотношения и формулу (14), находим, что

$$2g(X, \nabla_Z fY) = Zg(X,fY) + fYg(Z,X) - Xg(fY,Z) + g(fY,[X,Z]) + g(X,[Z,fY]) + g(Z,[X,fY]) =$$
$$2fg(X,\nabla_Z Y) + Z(f)g(X,Y) - X(f)g(Y,Z) + Z(f)g(X,Y) + X(f)g(Z,Y) =$$
$$2fg(X,\nabla_Z Y) + 2Z(f)g(X,Y) = 2g(X, f\nabla_Z Y) + 2g(X, Z(f)Y).$$

Откуда следует "правило Лейбница"

$$\nabla_Z fY = f\nabla_Z Y + Z(f)Y.$$

Таким образом, ∇_Z— ковариантное дифференцирование.

Докажем теперь, что семейство ковариантных дифференцирований ∇_Z образует аффинную связность, то есть линейно по Z. Это сразу следует из линейности по Z правой части формулы (14).

Докажем, что аффинная связность ∇_Z согласована с римановой метрикой g, то есть удовлетворяет условиям согласования 1° и 2°. Условие 1° получается, если вычесть из соотношения (14) это же соотношение с перестановкой Y и Z

$$2g(X,\nabla_Z Y) - 2g(X,\nabla_Y Z) = \big(Zg(X,Y) + Yg(Z,X) - Xg(Y,Z)\big) - \big(Yg(X,Z) + Zg(Y,X) - Xg(Z,Y)\big) +$$
$$\big(g(Y,[X,Z]) + g(X,[Z,Y]) + g(Z,[X,Y])\big) - \big(g(Z,[X,Y]) + g(X,[Y,Z]) + g(Y,[X,Z])\big) = 2g(X,[Z,Y]).$$

Условие 2° получается, если сложить (14) и это же соотношение с перестановкой X и Y

$$2g(X,\nabla_Z Y) + 2g(Y,\nabla_Z X) = \big(Zg(X,Y) + Yg(Z,X) - Xg(Y,Z)\big) + \big(Zg(Y,X) + Xg(Z,Y) - Yg(X,Z)\big) +$$
$$\big(g(Y,[X,Z]) + g(X,[Z,Y]) + g(Z,[X,Y])\big) + \big(g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[Y,X])\big) = 2Zg(X,Y)$$

□

Дадим теперь *координатное описание* связности Леви-Чивита. Зафиксируем локальную карту и локальные координаты $\{x^1, \ldots, x^r\}$, которые она порождает. Положим $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ и $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Согласно нашим определениям,

$$\nabla_X Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{и} \quad g(X,Y) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ij}.$$

Таким образом, соотношение

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

означает, что

$$0 = \big[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big] = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k} = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

То есть

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

Соотношение

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

означает, что функция

$$Zg(X, Y) = \frac{\partial}{\partial x^k} g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

равна

$$g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}) + g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}) = g_{lj}\Gamma^l_{ki} + g_{li}\Gamma^l_{kj}.$$

То есть,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\Gamma^l_{ki} + g_{li}\Gamma^l_{kj}.$$

Формула (14)

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y])$$

дает прямое описание символов Кристоффеля через структурные константы римановой метрики g_{ij}. Она означает, что функция

$$g(X, \nabla_Z Y) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}) = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}\big) = g_{il}\Gamma^l_{kj}$$

равна

$$\frac{1}{2}\big(Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y])\big) =$$

$$\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x^k} g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) + \frac{\partial}{\partial x^j} g(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}) - \frac{\partial}{\partial x^i} g(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k})\big) =$$

$$\frac{1}{2}\big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\big).$$

То есть

$$\Gamma^l_{kj} = \frac{1}{2} g^{il}\big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\big).$$

Задача 8.9. *Докажите, что связность Леви-Чевита евклидовой метрики нулевая, то есть $\nabla_X Y = 0$ для всех векторных полей X, Y.*

8.5. **Параллельный перенос, тензор кривизны, геодезические.** В конкретных геометрических задачах часто важно сравнить касательные вектора в различных точках многообразия. В евклидовой геометрии это делается с помощью параллельного переноса векторов. На произвольных римановых многообразиях параллельный перенос можно определить только вдоль кривых. В евклидовом пространстве поле векторов на кривой состоит из параллельных векторов, если вектор функция, которую они порождают постоянна, то есть её производная вдоль кривой равна 0. На произвольных римановых многообразиях надо поступать аналогично, но производную вдоль кривой понимать как ковариантную производную по касательному полю к кривой.

И так, рассмотрим гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to W \subset M$ без самопересечений с не обращающимся в 0 полем касательных векторов $\{A_t \in T_{\gamma(t)} | t \in [0,1]\}$ (такие кривые называются *невырожденные*). Гладкое векторное поле $\{Y_t \in T_{\gamma(t)} | t \in [0,1]\}$ называется *параллельным на* γ, если

$$\nabla_{A_t} Y_t = 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [0,1].$$

В этом случае говорят также, что вектора Y_t являются *результатом параллельного переноса* вектора Y_0 вдоль кривой γ.

Запишем это условие в карте (W, φ) с координатами $\{x^1, \dots, x^r\}$. В этой карте кривая γ описывается вектор-функцией $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^r(t))$. Поле поле касательных векторов имеет вид

$$A_t = \dot\gamma^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{то есть} \quad A_t f = \frac{df(\gamma(t))}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot\gamma^i(t).$$

Произвольное гладкое векторное поле на γ имеет вид $Y_t = y^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_{\gamma(t)}$. Его ковариантная производная по полю A_t равна

$$\nabla_{A_t} Y_t = \nabla_{\dot\gamma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}} y^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} = \dot\gamma^i(t) \big(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(t) + y^j(t) \Gamma^k_{ij}(t) \big) \frac{\partial}{\partial x^k} = \big(\dot\gamma^i(t) \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(t) + \dot\gamma^i(t) y^j(t) \Gamma^k_{ij}(t) \big) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Другими словами

$$\nabla_{A_t} Y_t = \Big(\dot y^k + \dot\gamma^i(t) y^j(t) \Gamma^k_{ij}(t) \Big) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{где} \quad \dot y^k = \dot\gamma^i(t) \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(t) = \frac{dy^k(t)}{dt}.$$

Таким образом, условие параллельности поля Y_t имеет вид

$$\dot y^k + \dot\gamma^i(t) y^j(t) \Gamma^k_{ij}(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad k.$$

Задача 8.10. *Докажите, что параллельный перенос вдоль кривой γ порождает обратимый линейный оператор $H_\gamma : T_pM \to T_qM$, где $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$. Докажите, что H_γ — тождественный оператор, если пространство M евклидово.*

Построенный оператор $T_pM \to T_qM$, вообще говоря, зависит от кривой γ, соединяющей точки p и q, даже если $p = q$. Если контур γ бесконечно маленький, то оператор $T_pM \to T_pM$ зависит о касательных векторов $A, B \in T_pM$ в начале и конце контура. Таким образом, в каждой точке $p \in M$ возникает линейный оператор $R_{A,B} : T_pM \to T_pM$. Можно доказать, что этот оператор выражается через ковариантное дифференцирование по формуле $R_{A,B} = \nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A - \nabla_{[A,B]}$. Совокупность всех таких операторов для всех точек $p \in M$ образует поле операторов, называемое *тензором кривизны*.

Замечание 8.1. *"На пальцах" вид оператора $R_{A,B}$ можно объяснить следующим образом. Оператор $R_{A,B}$ можно представлять себе как обход по параллелограмму натянутому на инфинитезимальные вектора v_A и v_B в направлениях A и B или, более точно, как разность меду обходами по парам сторон $v_A v_B$ и $v_B v_A$. В локальной карте $\{x^1, \ldots, x^r\}$ для коммутирующих векторных полей $A = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $B = \frac{\partial}{\partial x^j}$ эта разность описывается оператором $\nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A$. Если векторные поля A и B не коммутируют, то к это разности надо добавить оператор $\nabla_{[B,A]}$.*

Задача 8.11. *Докажите тождества $R_{X,Y}Z + R_{Y,X}Z = 0$ и $R_{X,Y}Z + R_{Z,X}Y + R_{Y,Z}X = 0$*

Задача 8.12. *Докажите, что естественный изоморфизм $\mathsf{Hom}(T_a, T_a) = T_a \otimes T_a^*$ превращает семейство операторов $R_{A,B}$ в гладкое сечение расслоения $TM^{\otimes 3} \otimes TM^*$, то есть в тензор R типа $(3,1)$.*

Пусть теперь ∇ — связность Леви-Чивита римановой метрики g. Рассмотрим параллельный перенос произвольных векторов $X_0, Y_0 \in T_{\gamma(0)}$ вдоль гладкой невырожденной кривой $\gamma : [0,1] \to M$. В результате получается семейство векторов $X_t, Y_t \in T_{\gamma(t)}$ на кривой γ. Условие согласования связности и метрики дает

$$\frac{dg(X_t, Y_t)}{dt} = A_t g(X_t, Y_t) = g(\nabla_{A_t} X_t, Y_t) + g(X_t, \nabla_{A_t} Y_t) = 0.$$

Это означает, что скалярное произведение в касательном пространстве сохраняется при параллельном переносе вдоль γ.

Тензор кривизны связности Леви-Чивита римановой метрики g показывает насколько метрика g отличается от евклидовой. Согласно задаче 8.10 тензор кривизны равен 0 для евклидова пространства. Можно доказать, что верно и обратное утверждение: риманово пространство локально евклидово, если его тензор кривизны равен нулю.

Кривая γ называется *геодезической*, если поле её касательных векторов $A_t = \dot{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ является полем параллельных векторов на γ. В координатной форме это означает, что

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 \quad \text{для всех} \quad t \quad \text{и} \quad k.$$

Если ∇ — связность Леви-Чивита римановой метрики g, то геодезические — это кривые, длина которых в метрике g меньше длин всех близких кривых с теми же концами.

Пример 8.2. *1) Геодезические в евклидовом пространстве — это прямые.*

2) Геодезические на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, — это сечения сферы плоскостями, проходящими через центр сферы.