Лекция 15 - 18. Принцип сжимающих отображений и теорема об обратном отображении

1 Принцип сжимающих отображений

Определение 1 *Отображение Φ метрического пространства M в себя называется сжимающим (с коэффициентом $q < 1$), если*

$$\rho(\Phi x, \Phi y) \leq q\rho(x, y) \quad \forall x, y \in M. \tag{1}$$

Теорема 1 *(Принцип сжимающих отображений) Сжимающее отображение метрического пространства в себя имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

2 Пикаровские приближения

Для любого $x \in M$ последовательность $(\Phi^k x | k \in \mathbb{N})$ сходится к $\mathrm{Fix}\Phi$ и называется последовательностью Пикаровских приближений к неподвижной точке $\mathrm{Fix}\Phi$.

Эти приближения бывают очень полезны.

3 Теорема об обратном отображении

Теорема 2 *Пусть $F - C^1$-гладкое отображение n-мерных областей. Тогда в окрестности каждой своей некритической точки x отображение F имеет C^1-гладкое обратное отображение G, и производная обратного отображения обратна производной исходного:*

$$dG(x) = ((dF) \circ G(x))^{-1}. \tag{2}$$

Напомним, что некритическая точка отображения F–это точка, в которой дифференциал отображения F невырожден, то есть якобиан отображения F не равен нулю. Это условие часто включают в формулировку теоремы вместо некритичности точки x.

4 Сведение к задаче о неподвижной точке

Достаточно рассмотреть случай, когда $dF(x) = id$. Действительно, пусть $dF(x) = A$. Тогда

$$F = A \circ F_0, \ dF_0(x) = E = id.$$

Если C^1-гладкое отображение F_0^{-1} существует, то это верно и для F:

$$F^{-1} = F_0^{-1} \circ A^{-1}.$$

Итак, пусть $dF(x) = E$; положим для простоты $x = 0$. Тогда (x теперь произвольно):

$$F(x) = id + f(x),\ \ f(x) = o(x) \tag{3}$$

при $x \to 0$. Более того,

$$||df(x)|| \to 0\ x \to 0 \tag{4}$$

в силу непрерывности dF.

Ищем отображение G, обратное F, в виде

$$G = id - g,\ \ g(x) = o(x)$$

при $x \to 0$. Имеем:

$$F \circ G = id,$$

или

$$(id + f) \circ (id - g) = id.$$

Отсюда

$$id - g + f \circ (id - g) = id.$$

Следовательно,

$$g = f \circ (id - g). \tag{5}$$

Рассмотрим отображение:

$$\Phi : g \mapsto f \circ (id - g).$$

Уравнение (5) означает, что g является неподвижной точкой отображения Φ. Она будет найдена с помощью принципа сжимающих отображений. Чтобы его применить, нужно сделать три шага:

- выбрать подходящее метрическое пространство M и доказать его полноту;
- убедиться, что Φ отображает M в себя;
- доказать, что Φ на M сжимает.

5 Выбор функционального пространства

Из (3), (4) следует, что существует такой шар $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq R\}$, что

$$||df(x)|| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B_R. \tag{6}$$

Пусть $r = \frac{R}{2}$. Рассмотрим пространство с метрикой C:

$$M = \{g : B_r \to \mathbb{R}^n,\ g \in C(B_r) | g(0) = 0,\ |g(x)| \leq |x|\} \tag{7}$$

Лемма 1 *Пространство M, определенное формулой* (7)*, полно в C.*

6 Отображение в себя

Оператор Φ:

$$g \mapsto f \circ (id - g) \tag{8}$$

называется оператором сдвига аргумента. Чтобы отображение $f \circ (id - g)$ было определено в точке x, нужно, чтобы $x - g(x)$ находилось в области определения отображения f. Это требование выполнено, если f определено в B_R, $x \in B_r$, $r = \frac{R}{2}$, и $|g(x)| \leq |x|$. Это рассуждение составляет часть доказательства следующей леммы

Лемма 2 *Оператор сдвига аргумента* (8) *отображает пространство M в себя.*

7 Сжатие

Лемма 3 *Оператор $\Phi : M \to M$ является сжимающим в метрике C.*

Применяя принцип сжимающих отображений, получаем: уравнение (5) имеет единственное решение $g \in M$. Следовательно, отображение $G = id - g$ является обратным к F. Тем самым, мы доказали, что $F-$ локальная биекция. Но отображение g только непрерывно, а нам нужно C^1-гладкое!

Здесь вступает в силу следующий важный принцип “регулярности неподвижной точки”: неподвижная точка сжимающего оператора зачастую обладает лучшими свойствами, чем “большинство” точек соответствующего функционального пространства.