

Группы и алгебры Ли II. Семинар 22.03.18

Задача 1. а) Вычислите расстояние от точки i до точки iy в метрике верхней полуплоскости ($|\ln y|$).

б) как получить общий ответ для расстояния в верхней полуплоскости $\ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$, где $\alpha = |z_2 - \bar{z}_1|$, $\beta = |z_1 - z_2|$?

Задача 2. Покажите, что луч $(0, i\infty)$ в полуплоскости Пуанкаре является орбитой подгруппы $SL(2, \mathbb{R})$, состоящей из диагональных матриц $\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ и t является на этом луче натуральным параметром

Задача 3. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ (так же как и группа $PGL(2, \mathbb{R})$) действует на проективной прямой дробно-линейными преобразованиями. Выпишите соответствующее действие образующих алгебры Ли. Проверьте коммутационные соотношения

Задача 4. а) Выпишите действие образующих алгебры Ли $SL(2, \mathbb{R})$ векторными полями в верхней полуплоскости

б) Проверьте, что это действие сохраняет метрику $\frac{dzd\bar{z}}{2\text{Im}^2 z} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$