

Группы и алгебры Ли II. Семинар 29.03.18

Задача 1. (листок 2 задача 6 1 семестра)

а) Рассмотрим правое (проверьте!) действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на \mathbb{R}^n , реализованное векторами-строками: $T_g(x) = xg$. Опишите векторное поле - образ матричной единицы e_{ij} . Проверьте коммутационные соотношения.

б) Рассмотрим левое (проверьте!) действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на \mathbb{R}^n , реализованное векторами-столбцами: $T_g(x) = gx$. Изготовьте из него правое действие и найдите векторное поле - образ матричной единицы e_{ij} . Проверьте коммутационные соотношения.

Задача 2. Картановскую подалгебру и корневое разложение ортогональной алгебры Ли удобно описывать в базисе, в котором комплексно линейное скалярное произведение имеет вид $\sum_i x_i y_{\bar{i}}$, где $\bar{i} = n + 1 - i$, т.е. для векторов-столбцов $x, y \in \mathbb{C}^n$ $(x, y) = x^t I y$, где I - матрица с единицами на главной антидиагонали, $I_{ij} = \delta_{i, \bar{j}}$. Опишите в этой реализации комплексную группу $SO(n, \mathbb{C})$ и алгебру Ли $so(n, \mathbb{C})$.

Задача 3. В качестве картановской подалгебры алгебр Ли $so(2m, \mathbb{C})$ выбирается подалгебра диагональных матриц.

а) какова размерность картановской подалгебры?

б) опишите корни и корневое разложение.