Случайные процессы, случайные матрицы и интегрируемые модели .
Листок 1.

Задача 1. Метод моментов и распределение Пастура-Марченко.

Пусть $X \in \mathbb{R}^{N\times p}$ — прямоугольная матрица, матричные элементы которой есть независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $\mathbb{E}(X_{ij}=0)$, единичной дисперсией, $\mathbb{D}(X_{ij})=1$ и конечными моментами более высоких степеней, где $N \le p$. Пусть $R_N = N^{-1}XX^T$ - выборочная коварицонная матрица $N\times N$ с собственными значениями $\lambda_1,\dots,\lambda_N$. Введем эмпирическую спектральную меру

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}.$$

а) Докажите, что в пределе $N\to\infty$,$p/N=c\ge 1$ моменты эмпирического спектрального распределения

$$\mu_k^{(N)} := \lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left(\int x^k dL_N\right),$$

стремятся к выражению

$$\lim_{N\to\infty}\mu_k^{(N)} = \sum_{l=1}^{k} c^l\mathcal{N}(k,l)$$

где

$$\mathcal{N}(k,l)=\frac{1}{k}C_k^l C_k^{l-1},$$

числа Нараяны и убедитесь, что они совпадают с моментами распределения Пастура-Марченко, заданного плотностью

$$f(x)=\frac{\sqrt{(a_+-x)(x-a_-)}}{2\pi x}\mathbf{1}_{a_-\le x\le a_+},$$

где $a_\pm=(1\pm\sqrt{c})^2$.

Указания:

1) Сведите задачу подсчета следов степеней матрицы R_N к задаче о циклах на двудольном графе. (Двудольным называется граф в котором есть два сорта вершин и все ребра соединяют только вершины разных сортов.)

2) Покажите, что циклы, вклад от которых выживает в пределе $N\to\infty$, обходят дерево и им можно сопоставить некоторые пути Дика. Проверьте совпадение чисел таких циклов с числами Нараяны для нескольких первых моментов.

3) Число Нараяны $\mathcal{N}(k,l)$ даёт количество путей Дика длиной в $2k$ шагов, в которых число нечетных шагов вверх равно l. Очевидно сумма чисел Нараяны дает полное число путей Дика - число Каталана,

$$C_k=\sum_{l=1}^{k}\mathcal{N}(k,l)=\frac{1}{k+1}C_{2k}^k$$

Связь чисел Нараяны с моментами распределения Пастура-Марченко можно установить как прямым интегрированием, так и воспользовавшись определением чисел Нараяны в терминах путей Дика и их связью с преобразованием Стильтьеса распределения Пастура-Марченко (см. задачу 3)).

Задача 2. Четвертькруговой закон

При $N = p$, c $= 1$, моменты распределения Пастура-Марченко становятся равны числам Каталана, которые дают также и четные моменты полукруглого закона Вигнера, а плотность обращается в *четверть-круговой закон*

$$f_{\mathrm{c}=1}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\mathbf{1}_{0\le x\le 1}.$$

Это название обусловлено его связью с полукруговым распределением Вигнера. В условиях предыдущей задачи воспользуйтесь теоремой Пастура-Марченко, чтобы найти предельное распределение собственных значений симметричной матрицы $2N\times 2N$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

и объясните эту связь.

Задача 3. Числа Нараяны и преобразование Стильтьеса распределения Пастура-Марченко.

Пусть $\mathcal{N}(k,l)$ число Нараяны, определяемое как количество путей Дика длиной в $2k$ шагов, в которых число нечетных шагов вверх равно l. Из предыдущей задачи известно, что моменты распределения Пастура-Марченко играют роль производящей функции чисел Нараяны по второму аргументу

$$\beta_k(c) := \sum_{l=1}^{k} c^l \mathcal{N}(k,l).$$

Цель задачи вывести это соотношение, пользуясь определением чисел Нараяны в терминах путей Дика.

а) Следуя рецепту вывода рекуррентных соотношений для чисел Каталана, выведите рекуррентные соотношения для $\beta_k(c)$,

$$\beta_k(c) = (c-1)\beta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{k-j}(c)\beta_{j-1}(c)$$

а из них уравнение на производящую функцию

$$\beta(t,c) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(c) t^k,$$

где $\beta_0(c) := 1$.

Указание:

При выводе рекуррентных соотношений удобно ввести вспомогательную функцию $\bar{\beta}_k(c)$, перечисляющую пути Дика с фиксированным числом четных шагов вверх. Далее вывод следует рецепту вывода соотношений для чисел Каталана. Рассмотрите часть пути Дика до первого возвращения. Эта часть без первого и последнего шагов снова дает путь Дика, в котором четные шаги стали нечетными и наоборот. Таким образом можно выразить $\beta_k(c)$ через $\beta_j(c)$ и $\bar{\beta}_m(c)$ с $m, j < k$. То же самое можно проделать для $\bar{\beta}_k(c)$. Исключая из двух соотношений $\bar{\beta}_k(c)$ получаем замкнутое рекуррентное соотношение для $\beta_k(c)$.

б)Используя утверждение из Задачи 1, о том, что $\beta_k(c)$ - моменты предельного распределения, установите связь производящей функции этих моментов $\beta(t,c)$ и преобразования Стильтьеса предельного распределения. Выберете решение для $\beta(t,c)$, которое обладает свойствами преобразования Стильтьеса вероятностной меры. Обратите преобразование Стильтьеса и получите распределение Пастура-Марченко из предыдущей задачи.

Задача 4. Сходимость моментов распределения Вигнера.

Пользуясь неравенством Маркова и первой леммой Бореля-Контелли докажите, что для моментов эмпирического распределения вигнеровских матриц, у которых матричные элементы имеют конечный четвертый (восьмой) момент, имеет место сходимость по вероятности (почти наверное). (План доказательства намечен в лекциях.)

Задача 5. Метод распределения Стильтьеса и полукруглый закон Вигнера

Пусть $X = X^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — симметричная матрица , матричные элементы которой выше и на главной диагонали есть независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $\mathbb{E}(X_{ij}=0)$, дисперсией, $\mathbb{D}(X_{ij}) = 1/N$. Выведите предельное выражение эмпирической спектральной меры такой матрицы методом преобразования Стильтьеса при $N\to\infty$.

а) Найдите связь между диагональным элементом $(G_N(z))_{ii}$ резольвенты такой матрицы

$$G_N(z) = (X - I_N z)^{-1}$$

и резольвентой $G_{N-1}^{(i)}(z)$ матрицы $X^{(i,i)}$, полученной вычеркиванием $i-$ й строки и $i-$го столбца из матрицы X (используйте результаты задачи 7).

б) Заменяя в полученном выражении $(G_N(z))_{ii}$, $X_{ij}\left(G_{N-1}^{(i)}(z)\right)_{jk} X_{ki}$ и X_{ii} их матожиданиями и предполагая близость преобразований Стильтьеса

$$s_N(z) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i - z}\right) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}G(z)$$

эмпирического спектрального распределения матриц X и $X^{(i,i)}$ получите уравнение на $s_N(z)$ в пределе $N\to\infty$.

в) Выберите решение полученного уравнения, которое удовлетворяет свойствам преобразования Стильтьеса, и, обратив его, выведите закон Вигнера.

Задача 6. Теорема Пастура-Марченко и свободная вероятность.

Пусть X - случайные матрицы из задачи 1 и R_N -соответствующая выборочная коварицонная матрица. Матрицу R_N можно представить в виде суммы

$$R_N = \sum_{s=1}^{p} R_N^s,$$

где R_N^s — матрица ранга один с матричными элементами.

$$(R_N^s)_{ij} := \frac{1}{N} X_{is} X_{js}.$$

Докажите теорему Пастура-Марченко, воспользовавшись асимптотической свободной независимостью матриц R_N^s.

Указание:

1) Матрица R_N^s имеет $N-1$ нулевых собственных значений (почему?) и одно ненулевое в направлении $\boldsymbol{X}^s = (X_{1s}, \dots, X_{Ns})$.

2) Используя закон больших чисел, вычислите к чему сходятся следы степеней матрицы R_N^s и постройте предельное преобразование Стильтьеса ее спектральной меры.

3) Используя закон больших чисел, покажите, что вектора $\boldsymbol{X}^s$ и $\boldsymbol{X}^{s'}$ ортогональны почти наверное при $N \to \infty$ и докажите, что матрицы $R_N^1, \dots, R_N^p$ асимптотически свободно независимы в некоммутативном по отношению к функционалу $\tau(M) = N^{-1}\mathbb{E}\mathrm{Tr}M$.

4) Постройте R-преобразование спектральной меры R_N^s и далее предельный вид R_N. Вернитесь к преобразованию Стильтьеса, и убедитесь, что оно совпадает с преобразованием распределения Пастура-Марченко.

Задача 7. Дополнение Шура.

Пусть $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ - комплексная матрица, имеющая блочную структуру

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{(N-m)\times(N-m)}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times(N-m)}$, $B \in \mathbb{C}^{(N-m)\times m}$. Докажите, что, если матрица D обратима, то определитель M равен

$$\det M = \det D \det\left(A - BD^{-1}C\right),$$

а обратная матрица имеет блочный вид

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Указание: Всякую матрицу можно представить в виде произведения блочнонижнетреугольной, блочнодиагональной и блочноверхнетреугольной матриц, первая и третья с единицами на главной диагонали. Тогда вычисление детерминанта и обращение можно производить блочно. Рассмотрите матрицу

$$L = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D^{-1}C & I_{N-m} \end{pmatrix},$$

и перепишите ML в виде

$$ML = \tilde{L}M,$$

где $\tilde{L}$ — верхнетреугльная матрица, с единицами на главной диагонали. Тогда $M = MLL^{-1} = \tilde{L}ML^{-1}$ — искомое разложение.

Задача 8. О возмущении спектра ранга один.

Пусть $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ — эрмитова матрица $M = M^+$, с собственными значениями $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$, а $M^{(1)}$ — эрмитова матрица полученная из M удалением первой строки и первого столбца с собственными значениями $\lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(1)} < \cdots < \lambda_{N-1}^{(1)}$.

1)Докажите, что

$$\lambda_1 < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{N-1}^{(1)} < \lambda_N.$$

Указание: Запишите уравнения на собственные значения матрицы M в терминах собственных векторов и собственных значений матрицы $M^{(1)}$ и исследуйте решения этих уравнений графически.

2) Докажите следствия из предыдущего утверждения о влиянии стирания строчки и столбца на эмпирическую спектральную функцию распределения $F_M(x) = N^{-1}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{x>\lambda_k}$

$$|F_M(x) - F_{M^{(1)}}(x)| \leq 1/N$$

и преобразование Стильтьеса

$$|s_M(z) - s_{M^{(1)}}(z)| \leq \frac{\mathrm{const}}{N\Im(z)}.$$