

Семинар 12. Пучки коник

Задача 1. Пусть $C_1 = \{x_1, x_2\}$ и $C_2 = \{y_1, y_2\}$ – две квадррики (т.е. пары точек) в $\mathbb{P}^1$ с уравнениями $C_1 = \{\Phi_1(x_1, x_2) = 0\}$ и $C_2 = \{\Phi_2(x_1, x_2) = 0\}$, где $\Phi_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, – ненулевые квадратичные формы от двух переменных. *Пучком квадррик на $\mathbb{P}^1$, порожденным квадрриками C_1 и C_2 , (или натянутым на квадррики C_1 и C_2),* называется множество $\langle C_1, C_2 \rangle$ квадррик на $\mathbb{P}^1$ вида $C(\lambda) = \{\Phi_1(x_1, x_2) + \lambda\Phi_2(x_1, x_2)\}$, где $\lambda \in \mathbf{k} \cup \{\infty\}$.

а) Докажите, что если $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, то пучок квадррик $\langle C_1, C_2 \rangle$ есть множество пар точек $\{x_1, x_2\}$ на $\mathbb{P}^1$ таких, что $x_2 = f(x_1)$, где $f : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ – *инволюция*, т.е. такое проективное преобразование прямой $\mathbb{P}^1$, отличное от тождественного, что $f^2 = \text{id}$.

б) Сколько в пучке $\langle C_1, C_2 \rangle$ может быть сдвоенных точек, т.е. квадррик вида $\{x, x\}$, $x \in \mathbb{P}^1$.

в) Пусть A и B – две различные сдвоенные точки в пучке квадррик $\langle C_1, C_2 \rangle$ на $\mathbb{P}^1$. Докажите, что в этом случае для любой квадррики $C(\lambda) = \{X_1, X_2\}$ этого пучка пара точек X_1, X_2 гармонически делит пару точек A, B .

Задача 2. Даны три различные точки A, B, C на прямой $\mathbb{P}^1$. Построим точки $A', B', C' \in \mathbb{P}^1$ такие, что пара A, A' гармонически делит пару B, C , пара B, B' гармонически делит пару A, C , а пара C, C' гармонически делит пару A, B . Докажите, что пары точек $\{A, A'\}$, $\{B, B'\}$ и $\{C, C'\}$, рассматриваемые как квадррики на $\mathbb{P}^1$, принадлежат одному пучку квадррик.

Задача 3. Аналогично определению пучка квадррик на $\mathbb{P}^1$ дается определение *пучка квадррик на $\mathbb{P}^2$* (называемого также *пучком коник*), *пучка квадррик на $\mathbb{P}^3$* и т.д. *Базисным множеством пучка коник* называется множество всех таких точек, через которые проходят все коники пучка.

а) Постройте пример пучка коник с тремя, двумя и одной базисной точкой соответственно.

б) Приведите пример пучка коник, в котором все коники – распавшиеся.

Задача 4. Пусть X – гладкая коника над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$, либо над полем $\mathbb{R}$ и пусть A, B, C, D, E – пять различных точек на X . Докажите, что всякая коника X' , проходящая через точки A, B, C, D, E , совпадает с коникой X .

Задача 5. Пусть поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто, либо $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, и пусть A, B, C и D – четыре точки на проективной плоскости, никакие три из которых не коллинеарны.

а) Пусть X – произвольная коника через точки A, B, C, D , заданная уравнением второй степени $f = 0$. Пусть уравнения прямых $AB, CD, \dots$, имеют вид $l_{AB} = 0, l_{CD} = 0, \dots$, соответственно. Докажите, что

$$f = \lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD}, \quad (1)$$

где λ и μ – некоторые скаляры из $\mathbf{k}$, не равные одновременно нулю, то есть $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

б) Докажите, что все коники, проходящие через точки A, B, C, D , образуют пучок.

Дополнительные задачи к семинару 12

Задача 1. Напомним, что две точки A и B называются *сопряженными* относительно коники C , если пара точек AB гармонически делит пару точек XY пересечения прямой (AB) с коникой X . Пусть дан пучок коник $\mathcal{P}$ с базисными точками A, B, C, D . Докажите, что для произвольной точки X , отличной от A, B, C, D , существует единственная точка Y , сопряженная точке X относительно всех коник пучка $\mathcal{P}$, не проходящих через точку X .

Задача 2. На вещественной аффинной плоскости даны 4 точки A, B, C, D , никакие 3 из которых не коллинеарны. Сколько имеется парабол, проходящих через точки A, B, C, D ?

Задача 3. (В этой задаче поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто.) Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в гладкую конику X . Как известно по теореме Паскаля, противоположные стороны этого шестиугольника пересекаются в трех коллинеарных точках, а прямая через эти точки называется *прямой Паскаля* для этого шестиугольника. Докажите, что прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$ и $ADCFEB$ пересекаются в одной точке (*теорема Штейнера*).