Л.9. Теорема Милютина. – 3, 22 марта 2018. Милютинские отображения.

Начнем сразу с конструкции, а не с общих разговоров. Конструкция новая (=не опубликована), отличная от Милютина, Пелчинского, Дитора, Этчеббери, Чобана… Это адаптация работы Реповш+Семенов+Щепин, 1993, в которой строится «универсальное» милютинское отображение на паракомпакт.

1. Основной элемент построения – теор.-множественный. «Рассыпанием» покрытия $\omega=\{\mathrm{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ мн-ва X назовём мн-во $X(\omega)=\coprod_{\alpha\in A}(\mathrm{X}_\alpha\times\{\alpha\})\subset \mathrm{X}\times\mathrm{A}$ (*всё покрытие пиццы – по отдельности*). Обозначим $\pi_\omega=\pi\big|_{X(\omega)}:X(\omega)\to X$ ограничение проекции $\pi:X\times A\to X$. Ясно, что $\left|\pi_\omega^{-1}(\mathrm{x})\right|$ – кратность ω в x.

Если $\Omega=\{\omega^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность покрытий $\omega^n=\{\mathrm{X}^n_{\alpha_n}\}_{\alpha_n\in A_n}$, то соберем все «рассыпания» π_{ω^n} (pull-back operation). В $A_\Omega=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$ выделим подмн-во $X_\Omega=\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}:\alpha_n\in A_n;\ \bigcap_n \mathrm{X}^n_{\alpha_n}\neq\varnothing\}$ «нитей».

2. Если (X,d) - метр. пр-во и размеры покрытий стрем. к 0, $mesh\,\omega^n=\sup\{\mathrm{diam}\,\mathrm{X}^n_{\alpha_n}:\alpha_n\in A_n\}\underset{n\to\infty}{\to}0$, то $\pi_\Omega:X_\Omega\to X$ - естественная сюръекция, $\pi_\Omega:(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\bigcap_n \mathrm{X}^n_{\alpha_n}$ - одна точка.

3. Если (X,d) - метр. компакт, все покрытия конечны и в $A_\Omega=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$ - тихоновская топология, то $A_\Omega=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$ гомеоморфно кантор. мн-ву *K*, $X_0=X_\Omega$ - его ретракт, $\varphi=\pi_\Omega:X_0\to X$ совершенно (=непр., замкнуто и компактны прообразы $\varphi^{-1}(x)=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n(x)$, где $A_n(x)=\{\alpha_n\in \mathrm{A}_n:\ \mathrm{x}\in\mathrm{X}^n_{\alpha_n}\}$)

!!4. Все покрытия ω^n – это носители непрер. разбиений единицы, $\omega^n=\{\mathrm{X}^n_{\alpha_n}=\mathrm{supp}\ \mathrm{e}^n_{\alpha_n}\}_{\alpha_n\in A_n}$, $\mathrm{e}^n_{\alpha_n}:\mathrm{X}\to[0;1]$, $\sum_{\alpha_n\in A_n}\mathrm{e}^n_{\alpha_n}(\cdot)\equiv1$. Тогда существует непрерывное отображение p из X в $P(X_\Omega)\subset \mathrm{C}(X_\Omega)^*$ - выпуклый (*-слабый) компакт вероятностных мер на X_Ω такое, что $\mathrm{supp}\ \mathrm{p}_x\subset\varphi^{-1}(x)$. Действительно, на каждом сомножителе в $\varphi^{-1}(x)=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n(x)$ уже «сидит» вероятн. мера: $p^n_x(\{\alpha_n\})=e^n_{\alpha_n}(\mathrm{x})$, $\alpha_n\in A_n(x)$; на $\varphi^{-1}(x)=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n(x)$ - мера-произведение.

$$\boxed{\varphi:X_0\to X\text{ - \textbf{\textit{милютинское отобр, т.е}} }\ \exists\ p:\mathrm{X}\to\mathrm{P}(X_0),\quad \mathrm{supp}\ \mathrm{p}_x\subset\varphi^{-1}(x),\quad X_0-\text{ ретракт } K.}$$

5. Пусть $(Af)(x)=\int_{\varphi^{-1}(x)}f(\cdot)\,dp_x$, $x\in X$; послойное усреднение значений $f\in C(X_0)$; $Af\in C(\mathrm{X})$. Значит $A=A_\varphi:C(X_0)\to C(X)$ - **регулярный оператор усреднения.** Он линеен, непрерывен $\|A\|=1$, положителен ($f\geq0\ \Rightarrow\ Af\geq0$), $A(\mathrm{id}_{X_0})=\mathrm{id}_X$, если $f=g\circ\varphi,\ g\in C(X)$, то

$$\boxed{(A(\mathrm{g}\circ\varphi))(x)=\int_{\varphi^{-1}(x)}(\mathrm{g}\circ\varphi)(\cdot)\,dp_x=g(x),\quad \mathrm{g}\circ\varphi\big|_{\varphi^{-1}(x)}\equiv g(x),\quad C(X_0)\underset{\varphi^*}{\overset{A}{\rightleftarrows}}C(X),\quad A\circ\varphi^*=id\big|_{C(X)}}$$

6. Как правило, поступают наоборот. Сначала $C(X_0)\underset{\varphi^*}{\overset{A}{\rightleftarrows}}C(X)$, $A\circ\varphi^*=id\big|_{C(X)}$, $\|A\|=1$ $A(\mathrm{id}_{X_0})=\mathrm{id}_X$.

Потом уже $\exists\ p:\mathrm{X}\to\mathrm{P}(X_0)$. <u>Это то же самое</u>. Если $A:C(X_0)\to C(X)$ оп.ус., то $C(X_0)^*\leftarrow C(X)^*:\mathrm{A}^*$ и образ $\mathrm{p}_x=\mathrm{A}^*(\delta_x)$ даст меру, сосредоточенную на прообразе точки, $\mathrm{supp}\ \mathrm{p}_x\subset\varphi^{-1}(x)$.

7. ***Следствие.*** $C(\mathrm{X})$ *изоморфно* $\varphi^*(C(\mathrm{X}))$ *, а оно дополняемо в* $C(\mathrm{X}_0)$.

<u>Док-во.</u> $C(\mathrm{X}_0)\leftarrow C(\mathrm{X}):\varphi^*$, $\|g\circ\varphi\|_{C(X_0)}=\|g\|_{C(X)}$ - подстановка, замена переменной, $\varphi:X_0\to X$ - «на».

Проектор $P_\varphi:C(\mathrm{X}_0)\to\varphi^*(C(\mathrm{X}))$ понятный:

$$\boxed{P_\varphi(\mathrm{f})=\varphi^*(\mathrm{A}_\varphi(f)),\quad P_\varphi=\varphi^*\circ\mathrm{A}_\varphi,\quad P_\varphi^{\ 2}=\varphi^*\circ(\mathrm{A}_\varphi\circ\varphi^*)\circ\mathrm{A}_\varphi=\varphi^*\circ\mathrm{A}_\varphi=P_\varphi}$$

8. ***Следствие.*** $C(\mathrm{X})$ *изоморфно* $\varphi^*(C(\mathrm{X}))$*, а оно дополняемо в* $C(\mathrm{X}_0)$*, которое дополняемо в C(K).*

<u>Док-во.</u> 7 + т. Дугунджи (или Борсук-Дугунджи), см. предыд. лекцию.

9. Итог, $C(\mathrm{X})$ **и *C(K)* изоморфны дополняемым подпространствам друг друга, *C(K)* – бесконечно делимо. Значит,** $C(\mathrm{X})$ **и *C(K)* изоморфны между собой. <u>Теорема Милютина доказана.</u>**

10. Альтернатива, строить для *K* и отрезка, потом для гильбертова куба *Q*, вкладывать *X* в *Q*, брать ограничение милютинского отобр. из *K* на *Q* на прообразе *X*.