НИС_8_ 6 марта. Теорема (формула) Дугунджи о продолжении.

Dugundji – Даганджи. Две книги: «Топология» 15 или более изданий. +Granas Fixed-point theory…

«Easy, but useful…»

Нормальные	$\subset$ *Паракомактные*	$\subset$ *Метрические*
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Downarrow$
т.Титце – Урысона	*т.Майкла*	*т.Дугунджи*
$\exists$ *продолжения в* $\mathbb{R}$, *в сеп.банаховы*	$\exists$ *селекции в банаховы*	$\exists$ *продолжения в лок.вып ТВП*

Теорема. Пусть A замкнуто в метрическом (X,d), E – локально выпуклое ТВП, C(A,E) и C(X,E) – ТВ пространства непрерывных отображений с комп.-откр. топологией. Существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathrm{Dug}:\mathrm{C}(\mathrm{A};\mathrm{E})\to C(\mathrm{X};\mathrm{E}),\ \mathrm{Dug}(\mathrm{f})\big|_A\equiv f$, $(\mathrm{Dug}(\mathrm{f}))(\mathrm{X})\subset\mathrm{conv}(\mathrm{f}(\mathrm{A}))$.

Конструкция. У каждой точки $\mathrm{x}\in\mathrm{X}\setminus\mathrm{A}$ возьмём $\mathrm{B}_x=\mathrm{B}(\mathrm{x};\alpha\cdot\mathrm{dist}(\mathrm{x},\mathrm{A})),\ \alpha<1$. Метрическое пространство $\mathrm{X}\setminus\mathrm{A}$ паракомпактно (т. А Стоуна). Значит, существуют непрерывные $\mathrm{e}_\gamma:\mathrm{X}\setminus\mathrm{A}\to[0;1],\ \ \gamma\in\Gamma$ такие, что:

(1) $\forall x\ \exists U(x):\ \{\gamma:\mathrm{supp}\,\mathrm{e}_\gamma\cap U(x)\neq\varnothing\}$ – *конечно* - локально конечно

(2) $\forall x\ \sum_{\gamma\in\Gamma}\mathrm{e}_\gamma(\mathrm{x})=1$ - разбиение единицы («мера на $\{\mathrm{x}\}$)

(3) $\forall\gamma\ \exists\mathrm{x}_\gamma:\ \ \mathrm{supp}\,\mathrm{e}_\gamma=\mathrm{Cl}\{\mathrm{x}:\mathrm{e}_\gamma(\mathrm{x})>0\}\subset\mathrm{B}_{\mathrm{x}_\gamma}$ - вписано в открытое покрытие.

Для каждого $\gamma\in\Gamma$ произвольно ткнём $a_\gamma\in A,\ \ \ d(x_\gamma,a_\gamma)<\beta\cdot dist(x_\gamma,\mathrm{A}),\ \ \ \beta>1$

Положим $(\mathrm{Dug}(\mathrm{f}))(\mathrm{x})=\begin{cases} f(x), & x=a\in A\\ \sum_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma(x)\cdot f(\mathrm{a}_\gamma), & \mathrm{x}\notin\mathrm{A}\end{cases}$. Это **<u>вся</u>** конструкция. Осталась проверка.

(*) Можно так подобрать $\alpha<1,\ \beta>1$, чтобы $x\in\mathrm{supp}\,\mathrm{e}_\gamma\ \Rightarrow\ d(x,a_\gamma)<2dist(x,\mathrm{A})$.

(**) $(\mathrm{Dug}(\mathrm{f}))\in\mathrm{C}(\mathrm{X},\mathrm{E})$

$(\mathrm{Dug}(\mathrm{f}))(\mathrm{x})-f(a)=\sum_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma(x)\cdot(f(\mathrm{a}_\gamma)-\mathrm{f}(\mathrm{a}))\in ?W$ – *вып.окр – ть* 0 *в* E, $\qquad f(\mathrm{a}_\gamma)-\mathrm{f}(\mathrm{a})\ \in ?W$

(***) Dug– непрерывен.

Выпуклое подмножество ЛВТВП есть абсолютный экстензор для метрич. пространств.

Следствие 1. (X,d) – компакт, E – банахово. Тогда $\mathrm{C}(\mathrm{A};\mathrm{E})$ изоморфно дополняемому в $\mathrm{C}(\mathrm{X};\mathrm{E})$.
Проектор $\mathrm{P}:\mathrm{C}(\mathrm{X};\mathrm{E})\to Dug(C(\mathrm{A};\mathrm{E}))$ - изоморфно $\mathrm{C}(\mathrm{A};\mathrm{E})$; $\qquad \mathrm{P}(\mathrm{f})=Dug(\mathrm{f}\,|_A)$.

Следствие 2. (X,d) – несчётный компакт. Тогда $\mathrm{C}(\{0,1\}^{\aleph_0})$ изоморфно дополняемому в $\mathrm{C}(\mathrm{X})$.

Следствие 3. Выпуклое замкнутое подмножество C ЛВЛМП E – есть равномерный ретракт
($\forall\ W$ – *симм.окр – ть* 0 *в* $E\ \exists$ *ретр.* $r:E\to C,\ \ r(x)-x\in 2W,$ ($\|r(x)-x\|\le 2dist(x,A)$))

Следствие 4. Непрерывное отображение компакта в пр-во Фреше равномерно аппроксимируется конечномерными (отображениями с конечномерными образами).

Следствие 5. Если $\mathrm{h}:\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_2$ гомеоморфизм между замкн. подмн. банаховых пр-в $\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2$, то имеется «продолжающий» гомеоморфизм $\mathrm{H}:\mathrm{E}_1\times E_2\to\mathrm{E}_1\times E_2$, $\ \mathrm{H}(\mathrm{a}_1;0)=(0;\mathrm{h}(\mathrm{a}_1))$.

$\mathrm{H}=\mathrm{H}_2\mathrm{H}_1,\ \ H_1(x_1;x_2)=(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2+(\mathrm{Dug}\,\mathrm{h})(\mathrm{x}_1)),\ \ H_2(x_1;x_2)=(\mathrm{x}_1-(\mathrm{Dug}\,\mathrm{h}^{-1})(\mathrm{x}_2);\mathrm{x}_2)$

Следствие 6. Любая (полная) метрика d’, которая эквивалентна d на замкнутом мн-ве в (X,d) продолжается до (полной) эквивалентной метрики на всем пр-ве.

$\mathrm{J}_1:(\mathrm{X},\mathrm{d})\to\mathrm{E}_1,\ \ J_2:(\mathrm{A};\mathrm{d}')\to\mathrm{E}_2$ - изометр. вложения, $\mathrm{h}=\mathrm{id}:(\mathrm{A};\mathrm{d})\to(\mathrm{A};\mathrm{d}')$. Берем сл.5.

$\mathrm{D}'(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=\|H(\mathrm{J}_1(\mathrm{x}_1),0)-H(\mathrm{J}_1(\mathrm{x}_2),0)\|,\qquad \mathrm{D}'(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)=\|(0,\mathrm{J}_2\,h(a_1))-(0,\mathrm{J}_2\mathrm{h}(\mathrm{a}_2))\|=d'(a_1;a_2)$.

Следствие 7. Любая сфера в бесконечномерном нормированном – AbsExt(метрических), стягиваема.
(Какутани в гильбертовом с базисом $\mathrm{e}_n,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$. Отображение $\mathrm{x}\mapsto(1-\|x\|)\dfrac{\mathrm{e}_0}{2}+\|x\|\mathrm{Sh}_+(\mathrm{x}/\|x\|)$ -
x переходит в точку, которая делит $[0,5\mathrm{e}_0;\mathrm{Sh}_+(\mathrm{x}/\|x\|)]$ в том же отношении, что и x делит $[0;\mathrm{x}/\|x\|]$ гомеоморфизм един. шара без неподв. точек; сфера – ретракт шара, сфера стягиваема).