НИС «Геометрия и топология банаховых пространств».
Краткое содержание, первые 5 занятий.

№1. 10 января. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$. Функционалы Минковского. Двойственность между нормами и нормирующими телами.

Теорема 1. Для метрики $\mathrm{d}: \mathrm{X}\times\mathrm{X} \to [0,\infty)$ TFAE: (1) она инвариантна относительно переносов и однородна; (2) она задаётся некоторой нормой $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$. *Напомним, что норма.....*

Одна из целей этой лекции – дать описание того, как устроены нормы в плоскости $\mathbb{R}^2$. (*На* $\mathbb{R}^n$ - *аналогично.*) Несмотря на все различия – все нормы на плоскости задают одну и ту же (евклидову) топологию = семейство открытых множеств.

Теорема 2. Для любых двух норм $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ на плоскости есть константы $0 < m < M < \infty$ такие, что $m\|u\| \le |||u||| \le M\|u\|,\ \ u \in \mathbb{R}^2$. В частности, множество $G - \|\cdot\| -$открыто $\Leftrightarrow$ $G - |||\cdot||| -$ открыто.

(*По-другому: тождественное отображение* $\mathbb{R}^2$ *на себя является изоморфизмом между нормированными плоскостями* $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|\right)$ *и* $\left(\mathbb{R}^2, |||\cdot|||\right)$)

На самом деле, евклидовой оказывается вообще любая (не обязательно задаваемая нормой или метрикой) топология τ, согласованная с векторными операциями, в которой одноточечные множества замкнуты.

Теорема 3. Пусть $\|\cdot\|:\ \mathbb{R}^2 \to [0;+\infty)$ - норма. Тогда $B_{\|\cdot\|}$ есть симметричное относительно *0*, выпуклое, компактное множество, для которого *0* является внутренней точкой.

Определение. Пусть V - произвольное выпуклое подмножество нормированного пространства X и пусть нулевой элемент $0 \in X$ является внутренней точкой V. Тогда функция $p_V : X \to [0;+\infty]$,
$p_V(x) = \inf\left\{t > 0:\ \dfrac{x}{t} \in V\right\}$ называется **функционалом Минковского** множества V.

Теорема 4. (обратная к Т.3) Пусть B есть симметричное относительно *0*, выпуклое, компактное множество, для которого *0* является внутренней точкой. Тогда имеется единственная норма $\|\cdot\| = p_B(\cdot)$, для которой B является ее единичным «кругом», т.е. $B = B_{\|\cdot\|}$.

Теоремы 3 и 4 означают, что все нормы в плоскости есть в точности функционалы Минковского всех плоских выпуклых, центрально-симметричных компактных тел. Кратко, между всеми нормами и всеми плоскими центрально-симметричными выпуклыми компактными телами есть естественная биекция.

Определение. Изометрией между $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|\right)$ *и* $\left(\mathbb{R}^2, |||\cdot|||\right)$ называется линейное отображение (биекция), при котором $\|u\| = |||Tu|||,\ u \in \mathbb{R}^2$,т.е. *сохраняются расстояния, или «круг»* $B_{\|\cdot\|}$ *переходит в «круг»* $B_{|||\cdot|||}$

Изометричны все нормы, у которых «круги» – эллипсы; они не изометричны нормам, у которых «круги» - многоугольники. Транзитивность действия группы изометрий на единичной окружности – критерий того, что норма задаётся скалярным произведением.

№2. 17 января. Банаховы пространства последовательностей.

Теорема 0. Для лин. отобр. $T : \mathrm{X} \to Y$ БП TFAE: (1) *T* непр.; (2) *T* непр. в нуле; (3) T ограничено, т.е.
$\|T\| = \sup\{\dfrac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X} : \mathrm{u} \neq 0\} = \sup\{\|Tu\|_Y : \|u\|_X = 1\} = \sup\{\|Tu\|_Y : \|u\|_X \le 1\} < \infty$.

Определение. Пусть X и Y - два нормированных n-мерных пространства (две нормы в $\mathbb{R}^n$). Расстояние Банаха-Мазура $\mathrm{d(X;Y)}$ - это инфимум по всем $T \in GL(\mathrm{n})$ произведения $\|T\|\cdot\|T^{-1}\|$ нормы оператора $T:\mathrm{X}\to Y$ и нормы оператора $T^{-1}:\mathrm{Y}\to X$.

Лемма 1. $\mathrm{d(X;Z)} \le \mathrm{d(X;Y)}\cdot\mathrm{d(Y;Z)}$. Всюду ниже $1 \le s < p < \infty$.

Лемма 2. $\mathrm{d}(l_p^2,\ l_s^2) \le 2^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}$. **Лемма 3.** $\mathrm{d}(l_p^2,\ l_2^2) = 2^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$.

Теорема 1. $2 \le s \le p$, то $\mathrm{d}(l_p^2,\ l_s^2) = 2^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}$. *По сопряжённым, то же для* $1 \le s < p \le 2$.

Случай $1 \le s < 2 < p$ *куда как более деликатный.*

Теорема 1'. $\max\left\{\gamma_{\mathrm{q},n}\cdot n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}},\ \gamma_{\mathrm{s},n}\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right\} \le \mathrm{d}(l_p^n,\ l_s^n) \le \max\left\{C_{p,n}\cdot n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}},\ C_{s,n}\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right\}$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\gamma_{\mathrm{p,k}}$ – константы (из неравенства) Хинчина и $C_{p,n}=1,\ n=2^k$, $C_{p,n}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{|p-2|/p}$, $n \ne 2^k$.

В частности, $\frac{\mathrm{C(n,s,p)}}{\sqrt{2}} \le \mathrm{d}(l_p^n,\ l_s^n) \le (1+\sqrt{2})\,\mathrm{C(n,s,p)}$, $\mathrm{C(n,s,p)} = \max\left\{n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}},\ n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right\}$.

Неизометричность можно чуть по-другому. Если бы конечномерные $l_p{}^n$ *и* $l_s{}^n$ *были бы изометричны, то и бесконечномерные* $l_p = l_p(l_p{}^n)$, $l_s = l_s(l_s{}^n)$ *были бы изометричны, а это **не так**, см. ниже.*

Теорема 2 (сам.?) Векторное пространство $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \nearrow \mathbb{R}^n = c_{00}$ всех финитных последовательностей нормируемо, но не может быть банаховым. Док-во. От противного. Все конечномерные подпространства бесконечномерного банахова – замкнуты и нигде не плотны. Далее, **теорема Бэра**. □

Теорема 3. Банаховы пространства $l_p = \{x = (\mathrm{x}_i)_{i=1}^\infty : \|(x_i)\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty\}$ и l_s не изоморфны.

Проф. док-во. (теорема Питта, 1936). Всякий линейный оператор $T: l_p \to l_s,\ p > s$ **компактен** (замыкание образа единичного шара компактно, не содержит шара) и поэтому необратим…….

Руками. $T(e_n) \to 0,\ \|T(e_n)\|_s \to 0$?? От противного. Переходя к подпоследовательности индексов можно считать, что $C = \|T\| \ge \|T(e_n)\|_s > a_1 > a_2 > \ldots. > b > 0$.

Утв.1. $y_n = T(e_n) \to 0$ покоординатно. Утв.2. Можно оставить подпоследовательность $z_k = y_{n_k}$ и «обрезки» $u_k \approx z_k$ так, что $\|u_k\| > b$ и $\|u_1 + u_2 + \ldots + u_N\|^s > Nb^s$. **Противоречие при $N \to \infty$:**

$$bN^{1/s} < \|u_1 + u_2 + \ldots + u_N\|_s \approx \|Te_{n_1} + Te_{n_2} + \ldots + Te_{n_N}\|_p \le \|T\|\|e_{n_1} + e_{n_2} + \ldots + e_{n_N}\| = \|T\| N^{1/p}, \qquad N^{1/s-1/p} \le const.$$

Шаг №1. $z_1 = y_{n_1} = y_1 = (\mathrm{y}_1^1, \mathrm{y}_2^1, \ldots., \mathrm{y}_i^1, \ldots)$, $u_1 = (\mathrm{y}_1^1, \mathrm{y}_2^1, \ldots., \mathrm{y}_{i_1}^1, 0, 0, \ldots)$, как только $\|u_1\| > a_1 > a_2$.

Шаг №2. Уйдем по столбцам $1, 2, \ldots, i_1$ настолько далеко, чтобы, начиная с этого места, скажем n_2,

$\sum_{j=1}^{i_1} |y_j^i|^p < a_1^p - a_2^p$ и $\sum_{j=1}^{i_1} |y_j^1 + y_j^i|^p = \sum_{j=1}^{i_1} |y_j^{n_1} + y_j^i|^p > a_1{}^p$. Тогда $z_2 = y_{n_2} = (\mathrm{y}_1^{n_2}, \mathrm{y}_2^{n_2}, \ldots., \mathrm{y}_i^{n_2}, \ldots)$,

$u_2 = (0, 0, \ldots, \mathrm{y}_{i_1+1}^{n_2}, \ldots., \mathrm{y}_{i_2}^{n_2}, 0, 0, \ldots)$, как только $\|u_2\|^p = \sum_{j=i_1+1}^{i_2} |y_j^i|^p > a_2 > a_3$.

Шаг №3. Уйдем по столбцам $1, 2, \ldots, i_2$ настолько далеко, чтобы, начиная с этого места, скажем n_3,

$\sum_{j=1}^{i_2} |y_j^i|^p < a_2^p - a_3^p$ и $\sum_{j=1}^{i_2} |y_j^{n_1} + y_j^{n_2} + y_j^i|^p > a_1{}^p + a_2{}^p$. Тогда $z_2 = y_{n_2} = (\mathrm{y}_1^{n_2}, \mathrm{y}_2^{n_2}, \ldots., \mathrm{y}_i^{n_2}, \ldots)$,

$u_2 = (0, 0, \ldots, \mathrm{y}_{i_1+1}^{n_2}, \ldots., \mathrm{y}_{i_2}^{n_2}, 0, 0, \ldots)$, как только $\|u_2\|^p = \sum_{j=i_1+1}^{i_2} |y_j^i|^p > a_2 > a_3$ ……

№3. 24 января. Другие банаховы пространства последовательностей.

Пополнения $\mathbb{R}^\infty = c_{00}$ по разным нормам дают разные БП последовательностей. Хорошо известные пространства $c_0,\ l_p = \{x = (x_i)_{i=1}^\infty : \|(x_i)\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty\},\ l_\infty$ замечательны многими обстоятельствами. Например,

Теорема 1. Любое дополняемое подпространство прост-ва $X = c_0,\ l_p,\ l_\infty$ изоморфно X. (*Доклад?*)

Но бывает и много других.

Шкала: $l_1 \subset l_p \subset l_{p'} \subset c_0 \subset l_\infty$, а пространства Орлича ещё и между этой шкалы.

В 1930-х годах В. Орлич предложил такой вариант замены степенной функции $M(\mathrm{t}) = t^p$ на абстрактную «хорошую» функцию: $M : [0;\infty) \to [0;\infty),\ \ M(0) = 0$, M возрастает и выпукла.

$$l_M = \{x = (x_i)_{i=1}^\infty : \exists \mathrm{t} > 0 \quad \sum M\left(|x_i|/t\right) < \infty\}, \qquad \|(x_i)\|_M = \inf\{t > 0 : \sum M\left(|x_i|/t\right) \le 1\}$$

Обычно неравенство треугольника в l_p (=неравенство Минковского) выводят из неравенства Гёльдера, а его – из неравенства Юнга. На самом деле, они не нужны, а важна только выпуклость.

Теорема 2. l_M - банахово пространство. Если $M(2u) : M(u) \le C < \infty$, ($\Delta_2 -$ условие), то вместо $\exists \mathrm{t} > 0$ можно поставить $\forall \mathrm{t} > 0$. Если M непрерывна, то $\|(x_i)\|_M$ - это корень уравнения $\sum M\left(|x_i|/t\right) = 1$.

Типичный пример функции Орлича: $M(u) = \int_0^u \varphi(s)ds$ для непрерывной, возрастающей $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty),\ \varphi(0) = 0$. Если две функции Орлича M_1, M_2 с $\Delta_2 -$условием совпадают в окрестности нуля, то $l_{M_1} = l_{M_2}$ и нормы эквивалентны. Более того,

Теорема 3. TFAE: (1) $l_{M_1} = l_{M_2}$; (2) $c \cdot M_1(u) \le M_2(u) \le C \cdot M_1(u)$ при некоторых $0 < c \le C < \infty$.

Единичные «орты» $e_1, e_2, ..., \mathrm{e}_n, ...$ образуют (шаудеровский, безусл., симм., огр.полн) базис.

Числовые характеристики: во сколько раз абсцисса точки касания больше подкасательной? Для $M(\mathrm{t}) = t^p$ *- это p.* В общем виде, $1 \le \alpha_M = \sup_{L\sim M} \varliminf_{t\to 0} \frac{tL'(t)}{\mathrm{L}(t)} \quad \le \quad \beta_M = \inf_{L\sim M} \varlimsup_{t\to 0} \frac{tL'(t)}{\mathrm{L}(t)} < \infty$.

Теорема 4. а) l_p изоморфно подпространству $l_M \quad \Leftrightarrow \quad p \in [\alpha_M ; \beta_M]$

б) $L(l_M ; l_N) = Comp(l_M ; l_N) \quad \Leftrightarrow \quad \beta_N < \alpha_M$ в) l_M рефлексивно $\Leftrightarrow$ $1 < \alpha_M$.

Примеры:

$M(u) = u^p(-\ln \mathrm{u})^\alpha$, $p = \alpha_M = \beta_M$, содержит (из Орличевских) только l_p и l_M, содержит дополняемо.

Но есть случаи с $p = \alpha_M = \beta_M$, когда l_M не содержит l_p дополняемо.

$M(u) = u^{p + \sin(\ln(-\ln \mathrm{u}))},\ p > 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_M < \beta_M$, но симметричный базис – единственнен (с точн. до изом.)

$M(u) = e^u - 1 - \mathrm{u}$.....

Пр-ва Лоренца. $d(w,p) = \{x = (x_i)_{i=1}^\infty : \ \|(x_i)\| = \left(\sum \left(x_i^*\right)^p w_i\right)^{1/p} < \infty\}, \quad w_i \searrow 0, \sum w_i = \infty$ для перестановки координат по убыванию. Не изоморфно l_p, но иногда изоморфно l_M. Например, при $M(u) = u^p : (-\ln \mathrm{u})$ и $u_k = 1 : \ln \mathrm{k}$.

Пр-ва Джеймса. Квазирефлексивное пространство, изометричное своему второму сопряженному.
С базисом, но не вкладывается в подпр-во с безусловным базисом.

$$J = \{x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \mathrm{c}_0 : \ \|(x_i)\| = \sup_{n_1 < n_2 < \ldots < n_{2m}} \left(\sum_{k=1}^m (x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}})^2\right)^{1/2} < \infty\}, \quad J^{**} = \ldots c \ \ \textit{вместо}\ c_0....$$

Пр-во Цирельсона. Рефлексивное пространство T, в котором каждое бесконечномерное подпространство финитно универсально (= для любого n-мерного НП в T есть n-мерное подпространство такое, что расстояние Банаха-Мазура не больше **универсальной** константы).

Лекция 4. 7 февраля. (31-го янв. не было). Пр-ва непрерывных функций.

Теорема 1. (К. Куратовский). Всякое (полное) метрическое пространство X изометрично (замкнутому) подмножеству БП $CB(X)$ - все непрерывные огр. числовые функции, $CB(X)=\mathrm{C}(\beta X)$

Теорема 2. (Э. Майкл, 1956). Всякое (полное) метрическое пространство изометрично линейно независимому (замкнутому) подмножеству БП $l_\infty(A)$ - все огр. числовые функции на А.

Док-во. $X_0 = X\cup\{\mathrm{y}_0\}$, $A=\{\mathrm{f}\in\mathrm{Lip}_1(\mathrm{X}_0):\mathrm{f}(\mathrm{y}_0)=0\}$. $H: X\to l_\infty(A)$, $\mathrm{H}_x(\mathrm{f})=\mathrm{f}(\mathrm{x}),\ \mathrm{x}\in\mathrm{X}$.

$$\left\|H_{x_1}-H_{x_2}\right\|=\sup_f\left\|H_{x_1}(f)-H_{x_2}(f)\right\|=\sup_f\left\|f(x_1)-f(x_2)\right\|\le\rho(x_1,\mathrm{x}_2),\quad \mathrm{f}\in\mathrm{Lip}_1$$

Теорема 3. (Войдыславский, 1939…). Всякое метрическое пространство X изометрично линейно независимому замкнутому подмножеству нормированного БП Y, densY=densX.

Док-во. Y-лин. оболочка образа вложения пополнения X в $l_\infty(A)$ из предыд. теоремы.

Теорема 4. (Банах?) Всякое нормированное пространство E изометрично и линейно отображается в $l_\infty(A)$, card A = dens E - наименьшая мощность всюду плотного подмножества.

Док-во. Считаем A – плотным подмножеством един. сферы. $\forall a\in A,\ \exists a^*\in E^*,\ \ a^*(a)=\left\|a^*\right\|=1$.

$T:\mathrm{E}\to l_\infty(A),\ \ T_x(\mathrm{a})=a^*(\mathrm{x}),\ \ \mathrm{x}\in E,\ a\in A$. T – линейно и $\left\|T_x\right\|=\sup_{a\in A}\left\|T_x(a)\right\|\le\left\|x\right\|$.

Теорема 5. (Мазур - Улам). Сюрьективная изометрия между нормированными пространствами, оставляющая 0 на месте, линейна. *Сюрьективность важна: любое отображение* $t\mapsto(t;L(t)),\ \mathbb{R}\to l_\infty^2,\ \ L-$ *1-липшицева, не линейная, с L(0)=0, L(t)=sint.*

Док-во. **Идея!!!** Середину отрезка определить не векторно, а в терминах нормы. Тогда при изометрии середина отрезка перейдет в середину,

$$U\left(\frac{x}{2}\right)=U\left(\frac{0+x}{2}\right)=\frac{\mathrm{U}(0)+U(x)}{2}=\frac{\mathrm{U}(x)}{2},\qquad U\left(x+y\right)=U\left(\frac{2x+2y}{2}\right)=\frac{2U(x)+2U(\mathrm{y})}{2}=U(x)+U(y).....$$

Для любого огр. X метрического (M, d) определим 1-центр $X_1=\{\mathrm{x}\in M:\forall\,\mathrm{y}\in X,\ \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y})\le 0{,}5\,\mathrm{diam}\,\mathrm{X}\}$ и по индукции определим $X_{n+1}=X_1(\mathrm{X}_n)\cap\mathrm{X}_n$. Если $\cap^{\infty}_{n=1}X_n$ непусто, то это одна точка!!

Если $X=\{\mathrm{x};\mathrm{y}\}$, то все $X_{n+1}=X_1(\mathrm{X}_n)\cap\mathrm{X}_n$ симметричны относительно $c=\dfrac{x+y}{2}$ и содержат *c.*

Теорема 6. (Банах, м.комп., Стоун - любые). $C(K)$ изометрично $C(\mathrm{T})$ $\Leftrightarrow$ K и T гомеоморфны.

Док-во. **Идея!!!** Свойство непр. функции иметь единственную точку максимума определить в терминах нормы. Тогда при изометрии одна «единственная точка максимума» перейдет в другую «единственную точку максимума», это и будет гомеоморфизм между компактами.

Лемма. Для $\varphi\in C(\mathrm{S})$ TFAE: (1) $\exists!\ s_0\in S:\ \left|\varphi(s_0)\right|=\left\|\varphi\right\|$; (2) $\forall\,\psi\,\exists\ \lim_{t\to0}\dfrac{\left\|\varphi+t\psi\right\|-\left\|\varphi\right\|}{t}$.

Более того, предел в (2) равен $\psi(\mathrm{s}_0)\cdot\mathrm{sgn}\ \varphi(\mathrm{s}_0)$.

«Стоун» Изометрия между $C(K)$ и $C(\mathrm{T})$ индуцирует изометрию между сопряженными, это «меры» и крайними точками единичных шаров являются +- «дельта»-функции, т.е. получается отображение самих компактов.

Теорема (Амир, 1966). Если $d(C(K),\mathrm{C}(\mathrm{T}))\le 2$, то K и T гомеоморфны. Константа 2 неулучшаема.

№5. 14 февраля. Гильбертовы пространства.

Теорема 1. Если H - бесконечномерное векторное пространство с нормой, которая задаётся скалярным произведением, и относительно которой H полно и сепарабельно, то H изометрично l_2.

Схема док-ва. 0) счётное всюду плотное подмножество; 1) счётное линейно независимое подмножество линейная оболочка которого всюду плотна; 3) ортонормированный базис; 4) каждому вектору – последовательность его скалярных произведений с элементами базиса.

Всё замечательно, но в конкретном случае найти базис – это задача. Например, построить базис в L_2

Простая геометрия l_2.

1. Замкнутая выпуклая оболочка ортов – это **не** $\{\sum x_i e_i : x_i \ge 0; \sum x_i = 1\}$. Попадает и начало координат.

2. Последовательность $\sqrt{n}\,\mathrm{e}_n$: 0 – предельная точка в слабой топологии, но нет слабо сходящейся к нулю подпоследовательности. Или – замкнутое, но не слабо замкнутое. В частности, слабая топология не метризуема, хотя шар (и любое огр. мн-во) в слабой топологии метризуемы.

Возьмем слабую окрестность нуля: $V = \{\mathrm{x} : |<x, a_i>| < \varepsilon,\ \mathrm{i} \le \mathrm{n}\},\ \mathrm{a}_i \in l_2$.

$$\left(|a_{1,1}| + \ldots + |a_{n,1}|\right)^2 + \left(|a_{1,2}| + \ldots + |a_{n,2}|\right)^2 + \left(|a_{1,3}| + \ldots + |a_{n,3}|\right)^2 + \ldots.. < \infty \quad \Rightarrow \quad \exists N \quad |a_{1,\mathrm{N}}| + \ldots + |a_{n,\mathrm{N}}| < \varepsilon / \sqrt{N}$$

Все $|a_{\mathrm{i,N}}| < \varepsilon / \sqrt{N}$ или $\exists N \ \left|\sqrt{N} a_{i,\mathrm{N}}\right| < \varepsilon,\ \mathrm{i} \le \mathrm{n}$. $\sqrt{N}\,\mathrm{e}_N \in V$. Все подпоследовательности не ограничены по норме и значит слабо не сходятся.

3. Существует непрерывная кривая, у которой перпендикулярны любые две, следующие друг за другом, хорды. *Тривиально, если вместо l_2 рассмотреть L_2 - хар. функции отрезков.*

4. … $F_1 \supset F_2 \supset \ldots,\ \bigcap \mathrm{F}_i \ne \varnothing$, если F_i замкн. вып. ограничены (верно в любом рефлекс). Без diam к нулю. Неверно в C[0;1] $\mathrm{F}_n = \{\mathrm{f} : \|f\| \le 1,\ \mathrm{f}(1/\mathrm{k}) = (-1)^k,\ \ \mathrm{k} \le \mathrm{n}\}$.

5. Любая борелевская инвариантная по сдвигам мера - бесконечна на любом шаре.

6. В топологии поточечной сходимости произведение операторов разрывно. (нильпотентные индекса 2 всюду плотны)

7. Любой обратимый оператор – произведение двух экспонент и GL(H) – лин. связна (стягиваема).

Теорема. Любое замкнутое выпуклое подмножество A – строго чебышёвское.

Пусть $d = dist(0; \mathrm{A})$ и $A_n = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}(0; \mathrm{d} + \mathrm{n}^{-1})$ - замкнуты, выпуклы, огр., вложены. $\bigcap A_n = \{*\}$??

$$x, y \in A_n \quad \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\right) \le 2\left(2(d + n^{-1})^2 - 2d^2\right) = \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} \to 0$$

Значит, диаметры стремятся к нулю и пересечение из одной точки. *Где выпуклость A и A_n нужна??*

Пример. $L \in C^*,\ L(f) = \int_0^{0,5} f - \int_{0,5}^1 f$. $A = \{\mathrm{f} : \mathrm{L}(\mathrm{f}) = 1\}$ - выпукло, замкнуто, но нет ближ. к нулю.

Теорема (Моцкин, Бунтман**).** Всякое строго чебышёвское подмножество в конечномерном евклидовом пр-ве выпукло.

Проблема (Стечкин, Кли, 1960**).** Верно ли для бесконечномерного гильбертова?