Теорема Милютина-1. 21 февраля 2018.
Принцип декомпозиции. Роль канторовского множества в классе метр. компактов.

Пусть имеется категория с понятием прямой суммы объектов и изоморфизма объектов. Как доказать изоморфность X и Y?
Лемма. *Если объекты изоморфны своим квадратам и изоморфны прямым слагаемым друг друга, то он изоморфны.* $X\oplus Y\approx(A\oplus Y)\oplus Y\approx A\oplus(Y\oplus Y)\approx A\oplus Y\approx X;\quad X\oplus Y\approx....\approx Y;\quad X\approx Y$
Редко информация про X и Y «симметрична»: чаще один объект «известен», в другой – нет.
Принцип декомпозиции (…+А. Пелчинский+…). Если один из двух объектов «бесконечно делим» и каждый из них изоморфен прямому слагаемому в другом, то объекты изоморфны.
Определение. *(БСМитягин). Банахово пространство X бесконечно делимо, если* $id_X=\sum_n P_n$ *- поточечно сильно (безусловно) сходящийся ряд проекторов* P_n *на подпространства* $\operatorname{Im}P_n$ *изоморфные всему X,* $\mathrm{T}_n:\operatorname{Im}P_n\xrightarrow{\approx}X$, $I_n:\operatorname{Im}P_n\subset X$ так, что:
- левый $\sum_n I_{n-1}T_{n-1}^{-1}T_nP_n=S_{\leftarrow}:X\to X$ и правый $\sum_n I_{n+1}T_{n+1}^{-1}T_nP_n=S_{\rightarrow}:X\to X$ «сдвиги» непрерывны;
- переход к клеточно-диагональному оператору $\sum_n I_nT_n^{-1}AT_nP_n=A^{diag}$ непрерывен $\|A^{diag}\|\le C\|A\|$;

Типичные примеры ID-пространств - $c_0(E),\ c(E),\ l_p(E)$.....: надо натуральный ряд индексов разбить на счётное число дизъюнктных бесконечных подмножеств и проекции P_n - ограничения на эти подмножества. Нам хватит принципа декомпозиции для $X\approx c_0(\mathrm{X})$.

$$X\approx c_0(X)\approx c_0(\mathrm{Y}\oplus B)\approx c_0(\mathrm{Y})\oplus c_0(B)\approx Y\oplus[c_0(\mathrm{Y})\oplus c_0(B)]\approx Y\oplus X$$
$$Y\approx X\oplus A\approx c_0(X)\oplus A\approx X\oplus[c_0(\mathrm{X})\oplus A]\approx X\oplus Y$$

<u>Пример.</u> $C[0;1]=\mathrm{C}$ ID, изоморфно $c_0(C_0)$, $\mathrm{C}_0=\{\mathrm{f}\in\mathrm{C}:\mathrm{f}(0)=\mathrm{f}(1)=0\}$.
$X=C,\quad Y=C_0,\quad Z=c_0(\mathrm{C}_0)$. Y дополняем в Z, Z дополняем в Y, Z – ID. По декомп. $Y\approx Z$.
Y дополняем в X, X дополняем в Y, Y – ID. По декомп. $X\approx Y$ и X – ID.
<u>Пример.</u> $C[0;1]$ изоморфно $C^{(\mathrm{k})}[0;1]$. $C^{(\mathrm{k})}[0;1]^m$ не равномерно гомеоморфно $C[0;1]$ (ГМХенкин)

> В частности, представляется особенно интересным вопрос, гомеоморфно ли пространство (C) пространству непрерывных функций, определенных в квадрате. Неизвестен ни один пример двух компактных метрических пространств с конечным или бесконечным числом измерений (в смысле Menger'а–Урысона) и таких, чтобы пространства непрерывных функций, определенных в них, были гомеоморфными.

<u>Пример (сложнее)</u> Изоморфны БП $C^{(k)}(I^n)$ и $C^{(k)}(\mathrm{M}^n)$ гладкое *n*-мерное компактное многообразие.
Проблема гиперпространства. Верно ли, что B изоморфно $B\oplus\mathbb{R}$?
Проблема Кантор-Бернштейн для БП. Верно ли, что БП изоморфны, если они изоморфны прямым слагаемым друг друга? Обе – нет. Gowers 1990-е. Есть БП $B\approx B^3\ne B^2$.

Схема док-ва теоремы Милютина. Если S – несчетный метрич. компакт, то C(S) и C изоморфны прямым слагаемым друг друга. Более того, вместо C = $C(\mathrm{K})=\mathrm{C}(\{0;1\}^{\aleph_0})$.

Теорема 1. S содержит гомеоморфную копию К. (К – самый «маленький» компакт)
Теорема 2. S есть непрерывный образ К. (К – самый «бошой» компакт)