8. Числа Каталана

Напомним, что неформально *n-м числом Каталана* $C(n)$ называется число триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника. Так, $C(0) = C(1) = 1$, $C(2) = 2$, $C(3) = 5\ldots$.

8.1. Докажите рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k)C(n-k-1).$$

8.2. Докажите, что следующие последовательности являются последовательностями Каталана (желательно и построить биекцию, и объяснить, почему выполнено рекуррентное соотношение):

а) *Пути Дика*: пути из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, составленные из векторов $(1,1)$ и $(1,-1)$ и лежащие не ниже оси абсцисс;

б) Число путей, не заходящих выше главной диагонали, которыми шахматную ладью можно провести из левого нижнего в правый верхний угол доски $(n+1)\times(n+1)$;

в) *Правильные скобочные структуры*: последовательности из n открывающих и n закрывающих скобок, для которых любой начальный участок последовательности содержит не меньше открывающих скобок, чем закрывающих;

г) Число способов провести n непересекающихся (в т.ч. в вершинах) диагоналей в выпуклом $(2n)$-угольнике;

д) (*для знакомых с теорией графов*) Число корневых бинарных деревьев с $n+1$ листьями;

е) Число способов расставить числа $1, 2, \ldots, 2n$ в прямоугольной таблице $2\times n$ так, чтобы они возрастали бы и по каждой строке, и по каждому столбцу.

8.3. В этой задаче речь идет о путях, составленных из векторов $(1,1)$ и $(1,-1)$.

а) Докажите, что путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-2)$ столько же, сколько путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$.

б) Докажите, что $C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

8.4. Рассмотрим граф, вершинами которого являются триангуляции $(n+2)$-угольника, а ребро между двумя вершинами отвечает паре триангуляций, отличающихся одной диагональю («флипом»). Нарисуйте этот граф для $n = 2, 3, 4$.

8.5. Что можно сказать о последовательности: *un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit, nou, deu, onze, dotze…*?

8.6*. Вычислите *определители Каталана–Ганкеля*:

а) $\begin{vmatrix} C(0) & C(1) & \ldots & C(n-1) \\ C(1) & C(2) & \ldots & C(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(n-1) & C(n) & \ldots & C(2n-2) \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} C(1) & C(2) & \ldots & C(n) \\ C(2) & C(3) & \ldots & C(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(n) & C(n+1) & \ldots & C(2n-1) \end{vmatrix}$.