

6. Линейные рекурренты

6.1. Найдите количество замощений «доминошками» (т.е. прямоугольниками 1×2) прямоугольника

- а)** $2 \times n$; **б)** $3 \times 2n$.

Здесь замощения, отличающиеся поворотом или симметрией, считаются различными.

6.2. Какая из указанных последовательностей удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$:

- а)** $a_n = 5n + 3$; **б)** $a_n = (2n + 1) \cdot 2^n$; **в)** $a_n = \cos(2n)$?

В следующих задачах «найдите» означает «найдите в виде формул, содержащих многочлены от n , a^n и $\cos(\omega n + \varphi)$ ».

6.3. Найдите все такие последовательности $\{a_n\}$, что $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ и для любого $n \geq 1$ выполнено равенство

- а)** $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$;
- б)** $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;
- в)** $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$;
- г)** $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$;
- д)** $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$;
- е*)** $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$.

6.4. Найдите все последовательности, для которых $a_1 = 5$ и $a_{n+1} - 2a_n$ равно

- а)** 0; **б)** 1; **в)** n ; **г)** 3^n ; **д*)** 2^n ; **е*)** $n \cdot 3^n$.

6.5. То же с заменой $a_{n+1} - 2a_n$ на $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n$.

6.6. а) Теорема. Если λ — корень кратности l уравнения $x^k = p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_0$, то для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ степени меньше l функция $f(n)\lambda^n$ является решением (линейного однородного рекуррентного) уравнения $a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + p_0a_n$.

б) Для любых чисел $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{Z}$ и различных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, последовательности $n^i \lambda_j^n$, $j = 1, \dots, k$, $i = 0, \dots, l_j$, линейно независимы.

в*) Теорема. Пусть p_{k-1}, \dots, p_0 — числа, $a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + p_0a_n$ для любого n , различные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все комплексные корни многочлена $x^k - p_{k-1}x^{k-1} - \dots - p_1x - p_0$ с кратностями l_1, \dots, l_k . Тогда существуют такие многочлены f_1, \dots, f_k , что $\deg f_j < l_j$ и $a_n = f_1(n)\lambda_1^n + \dots + f_k(n)\lambda_k^n$ для любого n .

г*) (Загадка.) Сформулируйте и докажите теорему о явном виде решений линейного НЕоднородного рекуррентного уравнения k -го порядка.