

4. Сколькоими способами...?

4.1. Сколькоими способами можно переставить буквы в слове:

- а) ВОЛГА; б) АМАЗОНКА; в) МИССИСИПИ?
- г) В сколькоих перестановках последнего слова три буквы С идут не подряд?

4.2 (Малая теорема Ферма). а) Пусть p — простое число. Сколькоими способами можно раскрасить карусель из p кабинок, если каждую кабинку можно красить в один из t цветов? (Карусель можно поворачивать).

- б*) А что происходит, если число кабинок составное?

4.3. Разложение (*composition*) целого положительного числа n — это его представление в виде $n = a_1 + \dots + a_k$, где a_i — целые положительные числа. Например, у числа 3 есть четыре разложения: 3, 1 + 2, 2 + 1 и 1 + 1 + 1. Числа a_i называются частями разложения. Найдите число разложений числа n ;

4.4. а) Сколько элементов в n -мерном векторном пространстве над полем \mathbb{F}_q ?
б) Сколько в этом пространстве существует прямых, проходящих через 0?
в) А k -мерных подпространств?
г) Полным флагом в векторном пространстве V называется последовательность подпространств $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$, где $\dim V_i = i$. Сколько существует полных флагов в пространстве \mathbb{F}_q^n ?
д) Что происходит с ответами к предыдущим пунктам при $q = 1$?

4.5. а) Сколько всего перестановок граней куба можно получить, вращая его?
б) Сколько существует различных «игральных кубиков» (кубиков, на гранях которых расставлены числа от 1 до 6)?
в) Сколько из них «правильных» игральных кубиков (таких, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7)?
г*) Два правильных игральных кубика склеивают по грани. Сколько различных объектов можно так получить?
д) Сколько существует различных кубиков, грани которых раскрашены в черный и белый цвета?
е*) А если цветов n ?

4.6* (Историческая задача). а) В Москве трамвайный билет с номером, состоящим из шести цифр, считался счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних. Найдите число счастливых билетов.
б) В Санкт-Петербурге трамвайный билет считают счастливым, если сумма цифр, стоящих на его чётных местах, равна сумме цифр на нечетных местах. Найдите число билетов, счастливых одновременно «по-московски» и «по-петербуржски».