

Коники в аффинной и евклидовой плоскости

Задача 1. Пусть проективное замыкание \bar{C} аффинной коники C , не обязательно невырожденной, не касается бесконечно удаленной прямой. Докажите, что полюс бесконечно удаленной прямой относительно \bar{C} является центром симметрии коники C . (Определение *полюса* прямой l относительно проективной коники см. в задаче 4 доп. задания к семинару 9.) Назовем такие коники в \mathbb{A}^2 *центральноными*.

Задача 2. *Эллипсом* с фокусами F_1 и F_2 в евклидовой плоскости E^2 называется геометрическое место таких точек P , что $F_1P + PF_2 = a$, где a - вещественное число, большее F_1F_2 . *Гиперболой* с фокусами F_1 и F_2 в E^2 называется геометрическое место таких точек P , что $F_1P - PF_2 = a$, где a - вещественное число, меньшее F_1F_2 . *Параболой* с фокусом F и директрисой d в E^2 называется геометрическое место точек P , равноудаленных от точки F и прямой d .

а) Докажите, что всякая невырожденная коника в E^2 есть эллипс, парабола или гипербола.

б) Какие из этих коник центральны?

Задача 3. а) Пусть C - коника в E^2 с фокусами F_1 и F_2 , $P \in C$ и прямая l касается C в точке P . Докажите, что прямая PF_1 симметрична прямой PF_2 относительно прямой l .

б) Докажите, что точка, симметричная фокусу параболы относительно касательной к этой параболе, лежит на директрисе.

Задача 4. а) Докажите, что директриса параболы является полярой ее фокуса.

б) Определим директрисы эллипса и гиперболы как поляры соответствующих фокусов. Докажите, что отношение расстояний от точки коники до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно.

Задача 5. *Диаметром* центральной коники в \mathbb{A}^2 называется прямая, проходящая через ее центр симметрии. Диаметры называются *сопряженными*, если их направления ортогональны относительно квадратичной части уравнения коники. Докажите, что диаметр коники делит пополам все хорды, параллельные сопряженному диаметру.

Задача 6. Пусть C - невырожденная центральная коника в E^2 .

а) Докажите, что найдется пара взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров l_1, l_2 коники C .

б) Что можно сказать о конике C , если пара l_1, l_2 не единственна?

Задача 7. В E^2 дана невырожденная коника. С помощью циркуля и линейки найдите все ее а) фокусы; б) директрисы; в) центр (если есть); г) оси симметрии.

Задача 8. Рассмотрим конику C в E^2 , задаваемую в аффинных координатах x, y уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Положим $\Delta_1 := a$, $\Delta_2 := \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\Delta_3 := \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Докажите, что если $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 >$

0 , $\Delta_3/\Delta_1 < 0$, то C - эллипс.

Задача 9. В условиях и обозначениях задачи 7 докажите, что если $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 \neq 0$, то C - гипербола.

Задача 10. В условиях и обозначениях задачи 7 докажите, что если $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 \neq 0$, то C - парабола.