

Рассматривается проективное пространство $\mathbb{P}^3 = P(V)$, где V - векторное пространство над полем $\mathbf{k}$, $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$, и пусть $(e) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ - базис V . С пространством V и базисом (e) связана так называемая *алгебра грассмановых многочленов* $A = \mathbf{k}\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ от переменных e_1, e_2, e_3, e_4 , в которой операция умножения, обозначаемая значком $\wedge$, по определению антикоммутативна на мономах e_i , то есть $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, а на произвольных грассмановых многочленах эта операция продолжена по линейности. На лекциях проверено, что A как векторное пространство есть прямая сумма подпространств: $A = \mathbf{k} \oplus V \oplus \wedge^2 V \oplus \wedge^3 V \oplus \wedge^4 V$, где $\wedge^d V$ - пространство однородных грассмановых многочленов степени d , где $0 \leq d \leq 4$. В частности, $\wedge^2 V$ - пространство однородных грассмановых многочленов степени 2 - имеет базис $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$.

Задача 1. а) Рассмотрим произвольный вектор $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in V$ как грассманов многочлен степени 1. Докажите, что $v \wedge v = 0$.

б) Докажите, что любой ненулевой элемент $\omega \in \wedge^2 V$ имеет вид либо б.1) $\omega = v \wedge w$ для некоторых непропорциональных векторов $v, w \in V$, либо б.2) $\omega = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ для некоторого базиса v_1, v_2, v_3, v_4 пространства V .

На пространстве $\wedge^2 V$ рассмотрим билинейную форму $B(\omega_1, \omega_2)$, определяемую из соотношения $\omega_1 \wedge \omega_2 = B(\omega_1, \omega_2) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ для произвольных $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 V$. На лекциях проверено, что форма $B(\omega_1, \omega_2)$ симметрична, а значит, является поляризацией квадратичной формы $F(\omega) = B(\omega, \omega)$. Рассмотрим пространство $\mathbb{P}^5 = P(\wedge^2 V)$. Гиперквадрика $G = \{\langle \omega \rangle \in \mathbb{P}^5 \mid F(\omega) = 0\}$ в пространстве $\mathbb{P}^5$ называется *квадрикой Плюккера* (или *квадрикой Плюккера-Клейна*).

Задача 2. На проективной прямой l в пространстве $\mathbb{P}^3$ рассмотрим две различные точки $a = \langle v \rangle$, $b = \langle w \rangle$, где $v = \sum_i x_i v_i$, $w = \sum_i y_i w_i \in V$.

а) Докажите, что

$$v \wedge w = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} p_{ij} e_i \wedge e_j, \quad (1)$$

где $p_{ij} = v_i w_j - v_j w_i$ - миноры матрицы $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$. (Эти миноры p_{ij} называются *плюккеровыми координатами* прямой $l = (ab)$ в $\mathbb{P}^3$.)

б) Рассмотрим в пространстве $\mathbb{P}^5 = P(\wedge^2 V)$ точку $x_{ab} = (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$, проективные координаты которой суть плюккеровы координаты, определенные по формуле (1). Докажите, что точка x_{ab} не зависит от выбора двух различных точек a и b на прямой l . Другими словами, если c, d - две другие различные точки на прямой l , то $x_{ab} = x_{cd} =: x_l$.

Задача 3. а) Для произвольной точки $x = \langle \omega \rangle \in \mathbb{P}^5$, где $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} p_{ij} e_i \wedge e_j$, набор $(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$ является набором проективных координат точки x . В этих координатах напишите уравнение квадрики Плюккера G . Является ли квадрика G невырожденной?

б) Пусть $x = \langle v \wedge w \rangle$, то есть $x = x_l$ в обозначениях задачи 2, где $l = P(U)$ - проективная прямая в $\mathbb{P}^3$, а v, w - какой-либо базис в U . Как уже проверено на лекции, $F(\omega) = 0$, то есть точка x лежит на квадрике Плюккера G . Докажите, что, обратно, если $x \in G$, то $x = x_l$ для некоторой прямой l в $\mathbb{P}^3$.

в) Докажите, что если $x_l = x_m$ - одна и та же точка на G , то $l = m$. (Тем самым, множество точек квадрики Плюккера G биективно множеству $G(2, 4)$ прямых пространства $\mathbb{P}^3$, называемому также *грассманианом прямых пространства $\mathbb{P}^3$* .) Итак, имеем биекцию

$$f : G(2, 4) \xrightarrow{\sim} G, \quad l \mapsto x_l. \quad (2)$$

Задача 4. а) Докажите, что при биекции (2) пучку прямых в $\mathbb{P}^3$ соответствует прямая на G .

б) Докажите, что, обратно, каждая прямая на квадрике Плюккера G является образом некоторого пучка прямых в $\mathbb{P}^3$ при биекции (2).

Задача 5. Докажите, что множество всех прямых в $\mathbb{P}^3$, пересекающих данную прямую l , отображается при биекции (2) в множество $G \cap T_{x_l} G$, где $T_{x_l} G$ - гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$, касательная к квадрике G в точке x_l .

Дополнительные задачи к семинару 13

Задача 1. Докажите, что всякая проективная плоскость на G изображает либо:

- а) множество прямых, проходящих через фиксированную точку в $\mathbb{P}^3$, либо
- б) множество прямых, лежащих в фиксированной плоскости в $\mathbb{P}^3$.

Задача 2. Докажите, что существует биекция грассманиана $G(2, 4)$ с дизъюнктивным объединением аффинных пространств вида:

$$G(2, 4) = \mathbb{A}^4 \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0.$$

Задача 3. Сколько точек содержит грассманиан $G(2, 4)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$?