Лекция 16-18. Теорема о неявной функции

1 Неподвижная точка сама себя сгладит: класс C^1

Лемма 1 *Решение функционального уравнения из прошлой лекции*

$$g = f \circ (id - g). \tag{1}$$

дифференцируемо в нуле, и $dg(0) = 0$.

Доказательство следует из соотношения

$$f(x - g(x)) = o(x) \text{ при } x \to 0.$$

Это доказывает, что

$$dG(0) = E.$$

Переходя от случая $dF(0) = E$ к $dF(0) = A$ и пользуясь тем, что точки, близкие к некритическим–некритические, получаем:

$$dG(F(0)) = A^{-1},$$

$$dG(x) = (dF \circ G(x))^{-1}. \tag{2}$$

Формула (2) доказывает не только дифференцируемость, но и непрерывную дифференцируемость G.

2 Старшие производные

Теорема 1 *Если в условиях теоремы об обратном отображении отображение F–класса C^N, то и обратное отображение G–тоже класса C^N.*

Доказательство подобно "вытягиванию себя за волосы". Оно проводится индукцией по N.

База индукции: $N = 1$. Это – сама теорема об обратном отображении.

Шаг индукции: пусть отображение G (а, следовательно, и $g = id_G$)–класса C^N. Тогда в формуле

$$dG = (dF \circ G)^{-1},$$

правая часть–класса C^N, поскольку dF класса C^N и, G класса C^N по предположению индукции. Следовательно, и левая часть–класса C^N. Но это и значит, что G–класса C^{N+1}.

Снова сработал принцип регулярности неподвижной точки!

3 Голоморфность

Теорема 2 *В окрестности некритического значения голоморфной функции определена обратная функция. Эта функция также голоморфна.*

4 Теорема о неявной функции в случае двух переменных.

Еще об обозначениях: когда переменные занумерованы, $x = (x_1, ..., x_n)$, мы обозначаем соответствующие операторы дифференцирования: $D_1, ..., D_n$ (старое обозначение). Когда они поименованы, например (x, y), мы пишем: D_x, D_y вместо D_1, D_2. Обозначения для старших производных сохраняются как были.

Теорема 3 *Пусть f–C^1-гладкая функция в области на плоскости. Тогда ее множество уровня, проходящее через некритическую точку–это C^1 гладкая кривая, задаваемая уравнением $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$.*

Добавление 1 *Пусть a–некритическая точка, и $D_y f(a) \neq 0$. Тогда множество*

$$M_a = \{(x, y)|f(x, y) = a\} \tag{3}$$

вблизи точки a имеет вид:

$$y = \varphi(x), \ \varphi \in C^1.$$

При этом:

$$\varphi'(x) = -\frac{D_x f}{D_y f}(x, \varphi(x))$$

Эта формула доказывается дифференцированием тождества $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Аналогично выводятся формулы для старших производных.

5 Сведение к теореме об обратном отображении.

Пусть $D_y f(a) \neq 0$. Рассмотрим отображение

$$F : (x, y) \mapsto (x, f(x, y)) = (X, Y). \tag{4}$$

Имеем:

$$dF(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & D_y f(a) \end{pmatrix}$$

Якобиан $J(a) \neq 0$. Следовательно, существует C^1-гладкое обратное отображение G, определенное в окрестности точки $F(a)$. Множество $f = 0$ при отображении F переходит в прямую $L : X_2 = 0$. Следовательно,

$$M_a = G(L).$$

Отображение G тождественно по первой координате:

$$G(X, Y) = (X, g(X, Y)),\ g \in C^1.$$

Следовательно,

$$G(L) = \{(X, g(X, 0))\}.$$

Но $x = X$. Получаем:

$$\varphi(x) = g(x, 0). \tag{5}$$

6 Тейлоровское исчисление: вычисление производных неявной функции с помощью рядов

Задача (на лекции не рассказывалась). Найти вторую производную неявной функции.

Ответ.

$$\varphi''(x) = -\frac{D^{2,0}f - 2D^{1,1}f\frac{D_xf}{D_yf} + D^{0,2}f(\frac{D_xf}{D_yf})^2}{D_yf}(x, \varphi(x))$$

Разлагая в ряды Тейлора функции f и φ, можно находить рекуррентно тейлоровские коэффициенты функции φ.